

SCHRIFTLICHE MATURPRÜFUNG IN MATHEMATIK



Name, Vorname:	Klasse:
-----------------------	----------------

Es gelten die folgenden Bestimmungen:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Der Lösungsweg zu allen Aufträgen muss klar und vollständig sein. Der Einsatz des CAS-Rechners¹ ist klar anzugeben. Zu Beginn der Prüfung muss der Speicher des CAS-Rechner vollständig gelöscht sein.
- Die Prüfung besteht aus zwei Teilen:
 - Teil 1: Die Aufträge 1 bis 3 sind ohne CAS-Rechner zu lösen. Als Hilfsmittel sind in diesem Teil die Formelsammlung² und ein einfacher Taschenrechner³ zugelassen.

Wenn Sie diesen Teil erledigt haben, legen Sie alle dazugehörigen Blätter (inklusive Aufträge) in den vorhandenen Umschlag, kleben Sie diesen zu und geben ihn der Aufsichtsperson ab (Achtung: Nur diejenigen Blätter, die sich im zugeklebten Umschlag befinden, werden für die Bewertung des 1. Teils beachtet).
 - Teil 2: Nach Abgabe von Teil 1 erhalten Sie Ihren CAS-Rechner, um damit und mit der Formelsammlung die Aufträge 4 bis 7 zu lösen.
- Die Schlussnote berechnet sich wie folgt:

$$\text{Note} = \frac{5 \cdot \text{«erreichte Anzahl Punkte»}}{42} + 1 \text{ (gerundet auf halbe Noten)} =$$

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Auftrag	1	2	3	4	5	6	7	Total
mögliche Punkte	4.5	7.5	8	9	5	5.5	10	49.5
erreichte Punkte								

¹TI-Nspire CX-T II CAS

²Adrian Wetzl. *Formelsammlung Mathematik*. 9. Aufl. 2021. ISBN: 978-3-9523907-1-9.

³TI-30 ECO RS, TI-30X A, TI-30Xa Solar oder TI-30X IIS

Name, Vorname:

Klasse:

Teil 1: Ohne CAS-Rechner



Abbildung 1: CAS-Rechner nicht erlaubt⁴

Die Aufträge in diesem Teil sind ohne CAS-Rechner zu lösen. Als Hilfsmittel sind in diesem Teil die Formelsammlung⁵ und ein einfacher Taschenrechner⁶ zugelassen.

⁴Wikimedia Commons. *TI-Nspire CX-T CAS II*. Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TI-Nspire_CX-T_CAS_II.jpg (besucht am 05.02.2024)

⁵Adrian Wetzel. *Formelsammlung Mathematik*. 9. Aufl. 2021. ISBN: 978-3-9523907-1-9.

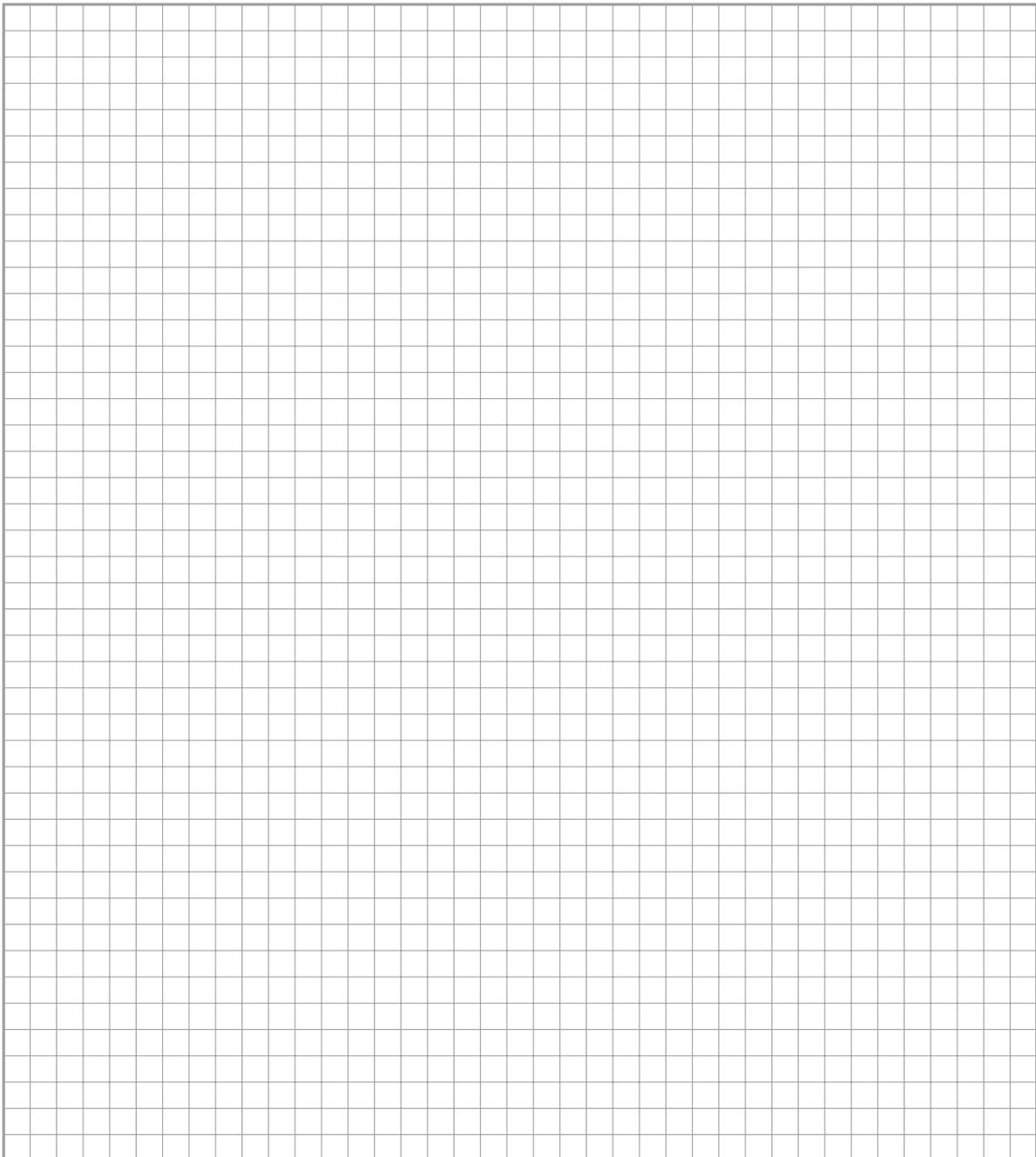
⁶TI-30 ECO RS, TI-30X A, TI-30Xa Solar oder TI-30X IIS

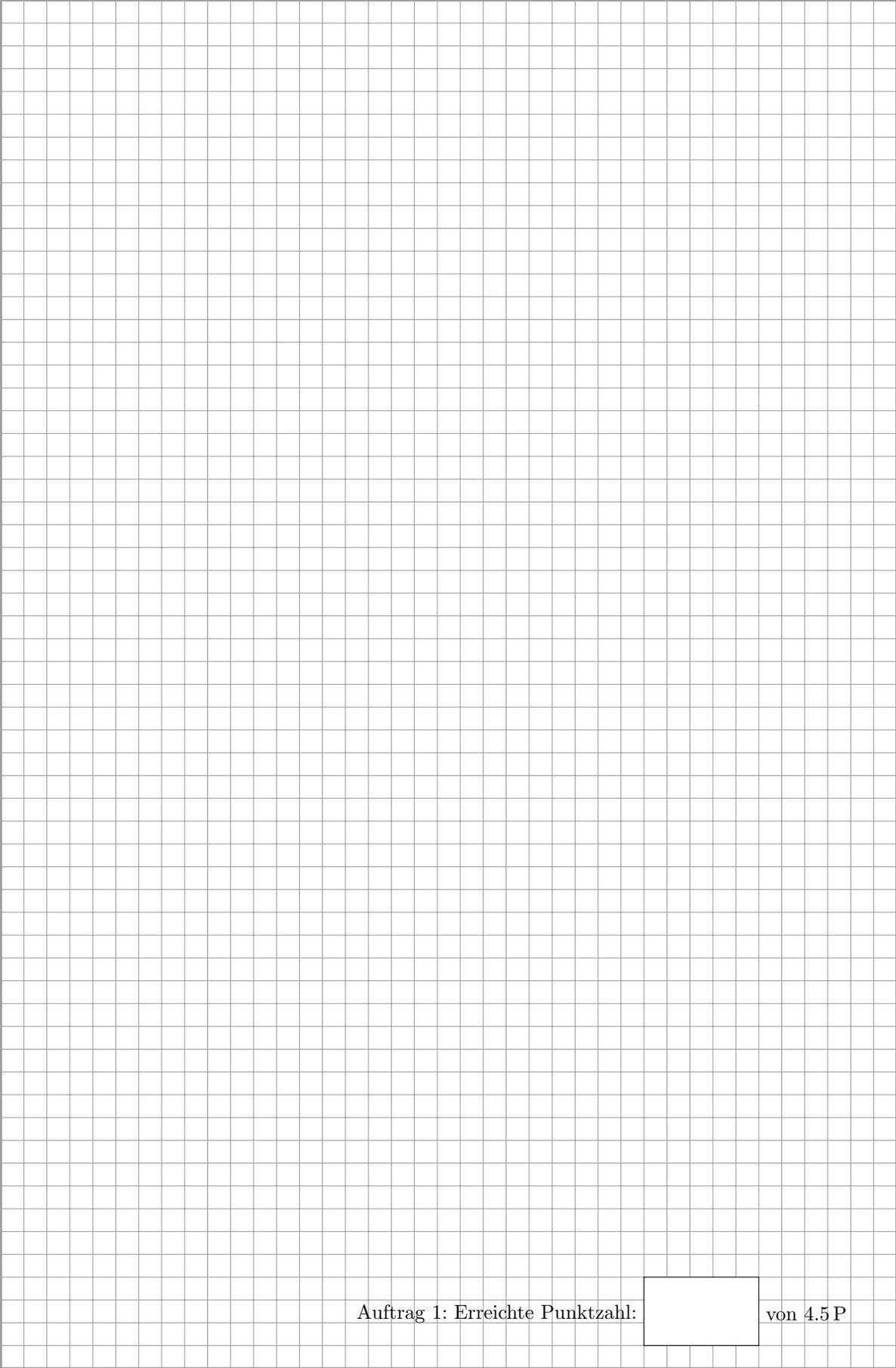
Auftrag 1 (4.5 P)

Gegeben sind die folgenden drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie die Länge von \vec{a} . (1 P)
- (b) Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} stehen senkrecht aufeinander. Bestimmen Sie die Komponente z . (1.5 P)
- (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren \vec{a} und \vec{c} aufgespannten Parallelogramms. (2 P)





A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 1: Erreichte Punktzahl:

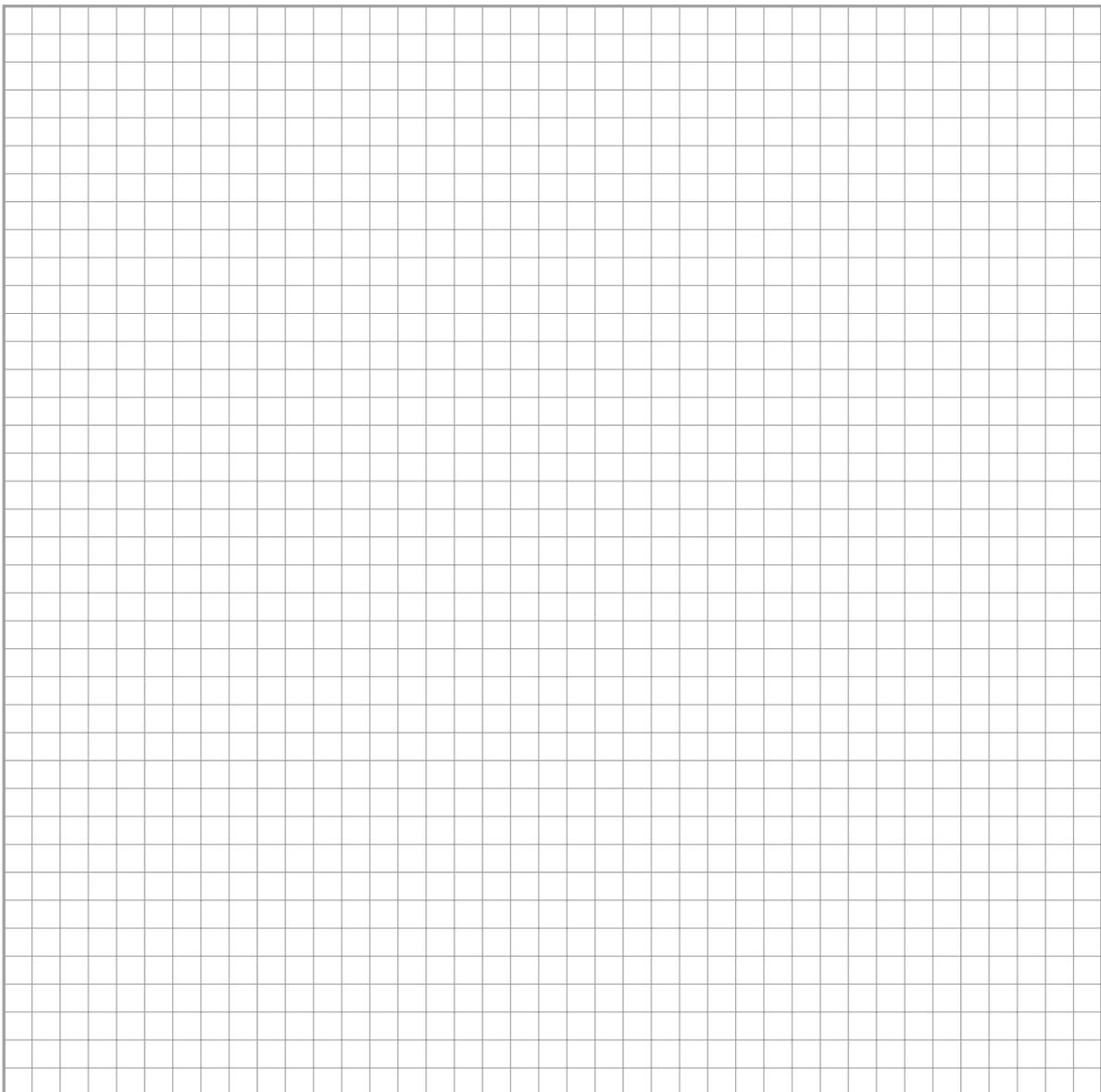
von 4.5 P

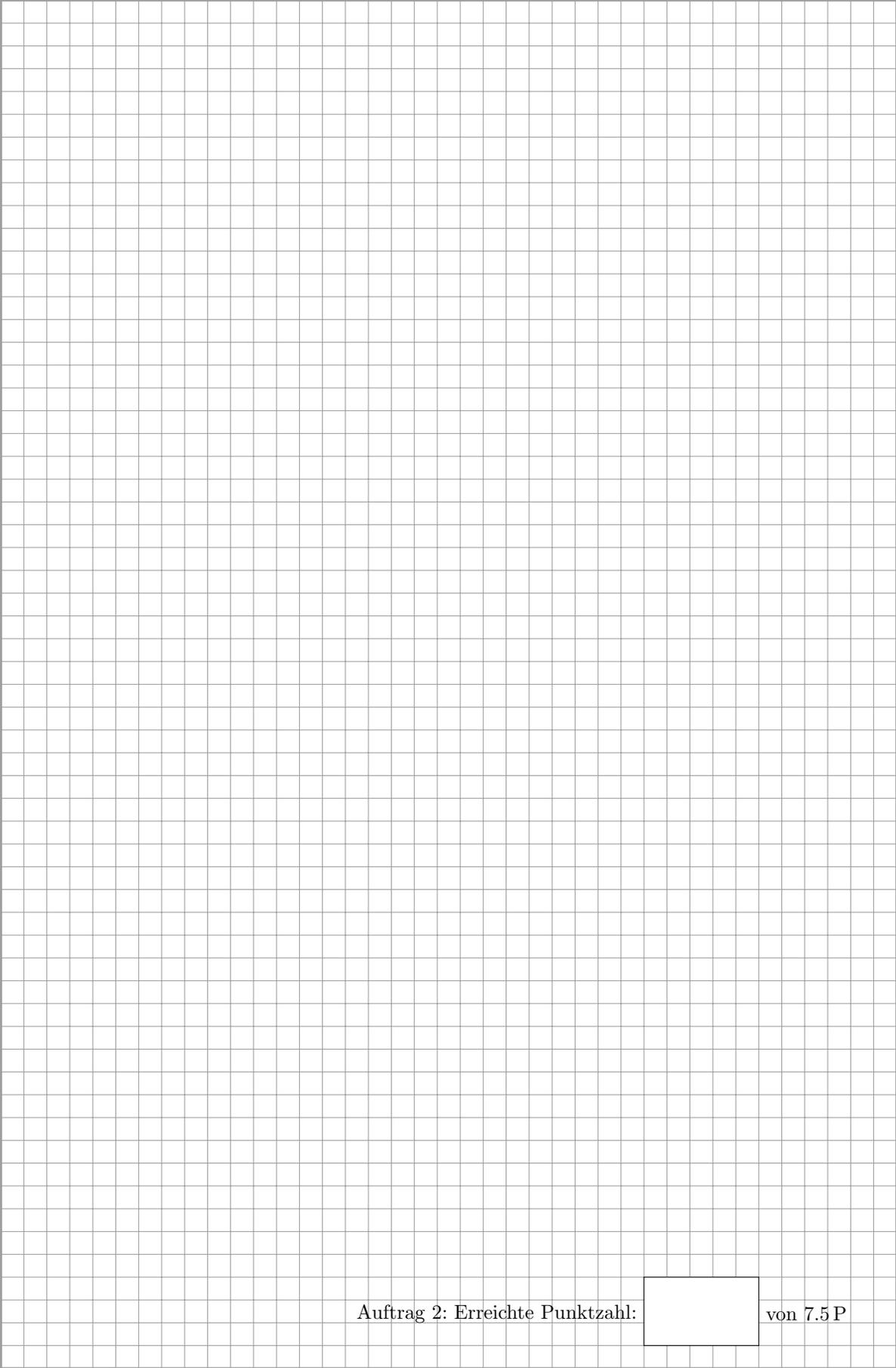
Auftrag 2 (7.5 P)

Von den zwei Geraden g und h sind die folgenden Informationen gegeben:

- Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und geht durch den Koordinatenursprung.
- Die Gerade h hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und schneidet die Gerade g im Punkt $P = (4, y_P, z_P)$.

- (a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden g . (1 P)
- (b) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden h . (1 P)
- (c) Die Geraden g und h spannen eine Ebene auf. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (0, 2, 1)$ zu dieser Ebene. (3 P)
- (d) Geben Sie ein Beispiel für eine Gerade j , die parallel zur Geraden h und windschief zur Geraden g verläuft. Begründen Sie, dass j und g tatsächlich windschief sind. (2.5 P)





A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 2: Erreichte Punktzahl:

von 7.5 P

Auftrag 3 (8 P)

Bei den folgenden 16 Aussagen müssen Sie jeweils ankreuzen, ob sie wahr oder falsch sind.

Die Bewertung erfolgt nach folgendem Schema:

- korrekte Antwort: +0.5 P
- die ersten vier inkorrekten Antworten: 0 P
- jede weitere inkorrekte Antwort: -0.5 P
- keine Antwort: 0 P

Das Minimum der Punktesumme beträgt 0 P.

(a) *Vektorgeometrie*

(i) Die Gerade

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2024 \\ 2024 \\ 2024 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2024 \\ 0 \\ 2024 \end{pmatrix}$$

wahr falsch (0.5 P)

durchstösst die Ebene mit der Gleichung

$$x + 2024 \cdot y - z = 0.$$

(ii) Für zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w} im dreidimensionalen Raum gilt immer

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0.$$

wahr falsch (0.5 P)(iii) Aus $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$ folgt $|\vec{v} + \vec{w}| = |\vec{v}| + |\vec{w}|$.wahr falsch (0.5 P)(b) *Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik*

(i)

$$\binom{1000}{500} = \frac{1000!}{(500!)^2}$$

wahr falsch (0.5 P)

(ii)

$$99! = \frac{100!}{2}$$

wahr falsch (0.5 P)(iii) Die Anzahl der Möglichkeiten, in einer Folge von 8 Münzwürfen genau drei Mal «Kopf» hintereinander zu erhalten, beträgt $\binom{8}{3}$.wahr falsch (0.5 P)(iv) Ein Würfel wird 2024-mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, nie ⚡ zu werfen, ist strikt grösser als 0.wahr falsch (0.5 P)

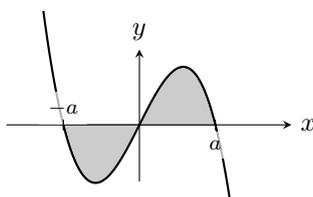
(c) *Analysis*

(i)
$$\int_{-2024}^{2024} x^2 dx > 0$$
 wahr falsch (0.5 P)

(ii)
$$\int_{-2024}^{\sqrt{2024}} x dx > 0$$
 wahr falsch (0.5 P)

(iii) Der Inhalt der in Abbildung 2 grau hinterlegten Fläche ist

$$\left| \int_{-a}^a f(x) dx \right|.$$



wahr falsch (0.5 P)

Abbildung 2: Graph der Funktion f und graue Fläche

(iv) Die Funktion $f(x) = -6 - x^2$ hat mehr als eine Nullstelle. wahr falsch (0.5 P)

(v) Der Graph einer Polynomfunktion hat immer mehr Extremstellen als Wendepunkte. wahr falsch (0.5 P)

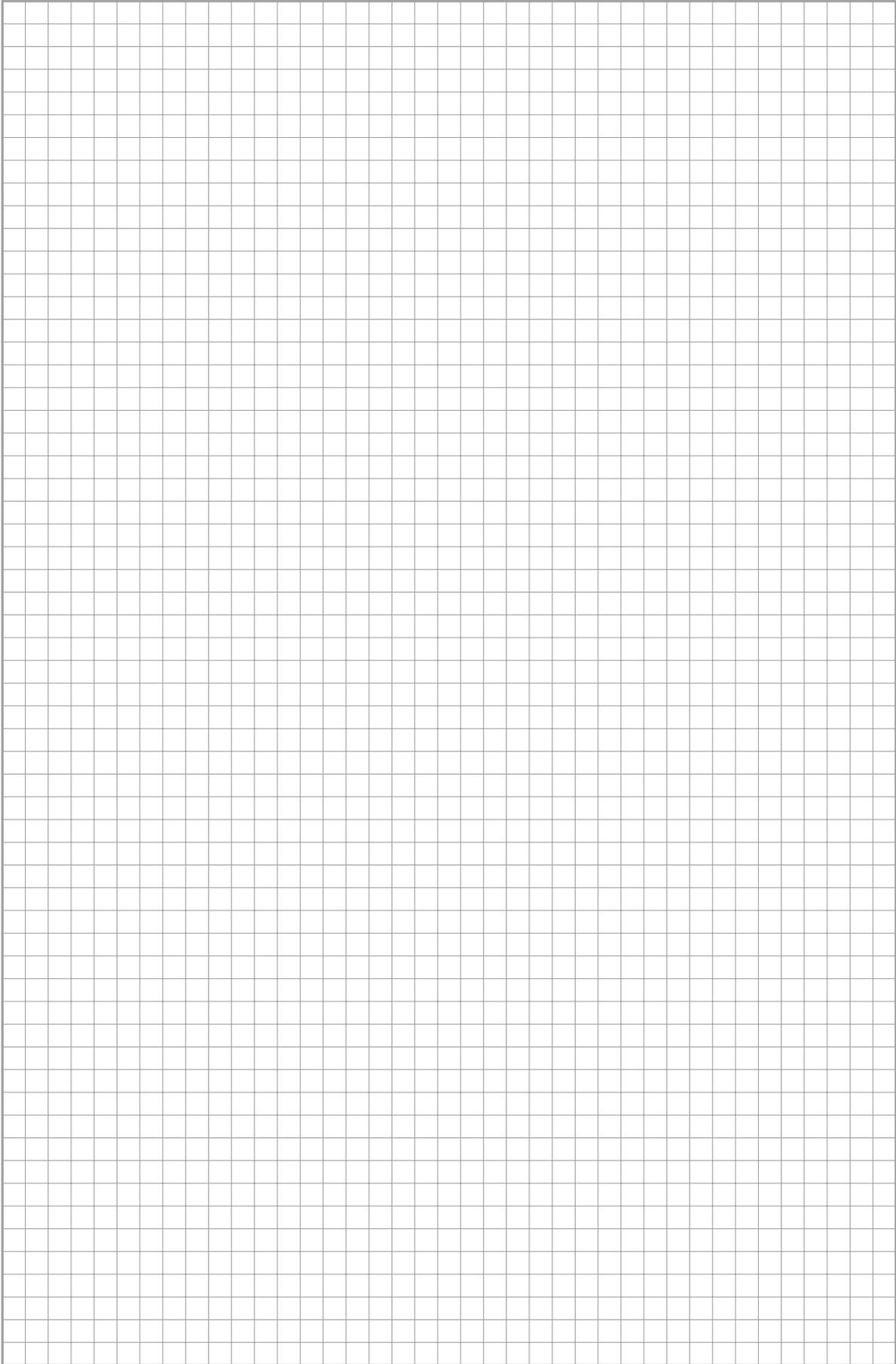
(vi) Der Graph einer Polynomfunktion fünften Grades kann vier Wendepunkte haben. wahr falsch (0.5 P)

(vii) Es gibt eine Funktion F , welche eine Stammfunktion ist von sowohl $f(x) = x$ als auch $g(x) = x + 1$. wahr falsch (0.5 P)

(viii) Wenn $f(x) = \sin(2 \cdot x)$, dann ist $f'(5 \cdot \pi) < 0$. wahr falsch (0.5 P)

(ix) Die 2024-te Ableitung von $f(x) = \sin(2 \cdot x)$ ist $2^{2024} \cdot f(x)$. wahr falsch (0.5 P)

Auftrag 3: Erreichte Punktzahl: von 8 P
--



Name, Vorname:

Klasse:

Teil 2: Mit CAS-Rechner



Abbildung 3: CAS-Rechner erlaubt⁷

Für die Aufträge 4 bis 7 sind als Hilfsmittel der CAS-Rechner⁸ und die Formelsammlung zugelassen. Sie erhalten Ihren CAS-Rechner nach der Abgabe von Teil 1.

⁷Wikimedia Commons. *TI-Nspire CX-T CAS II*. Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TI-Nspire_CX-T_CAS_II.jpg (besucht am 05.02.2024)

⁸TI-Nspire CX-T II CAS

Auftrag 4 (9 P)

Der Kreis K verläuft durch den Ursprung $O = (0, 0)$ und hat den Mittelpunkt $M = (4, 3)$.

Der Graph der Parabel

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

schneidet den Kreis sowohl im Ursprung als auch im Punkt $P = (x_P, 6)$. Des Weiteren ist P ein Hochpunkt des Graphen von p .

(a) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung der Geraden g durch die Punkte O und M . (0.5 P)

(b) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von p . (3 P)

Hinweis: Falls Sie (b) nicht lösen können, rechnen Sie mit der Gleichung

$$p(x) = -\frac{3}{32} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x$$

weiter.

(c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangenten t an den Graphen von p , welche parallel zur Geraden g verläuft. (2.5 P)

(d) Berechnen Sie den Inhalt der in Abbildung 4 grau hinterlegten Fläche. (3 P)

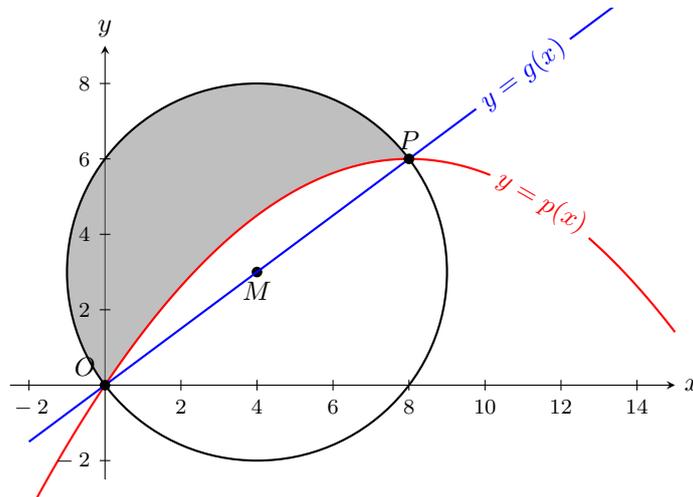
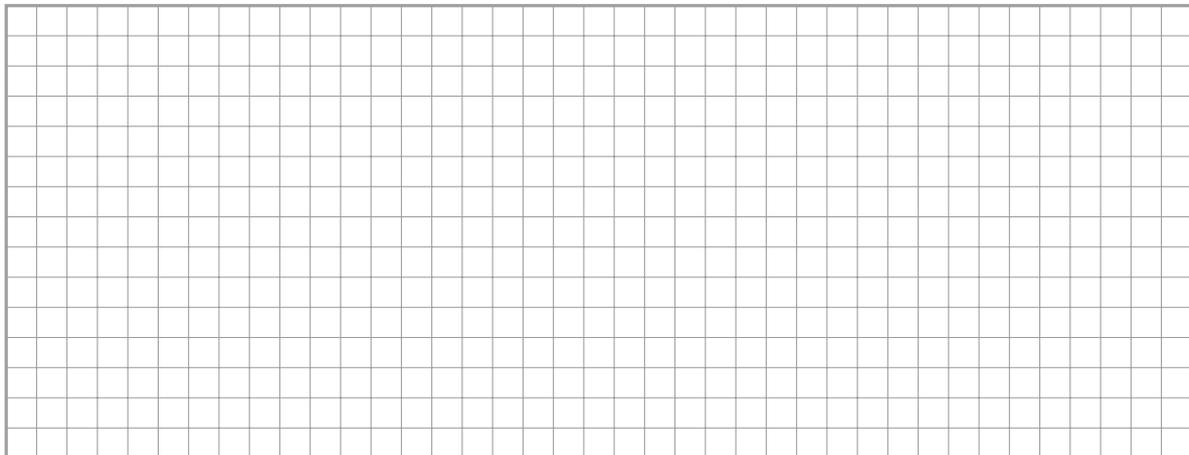
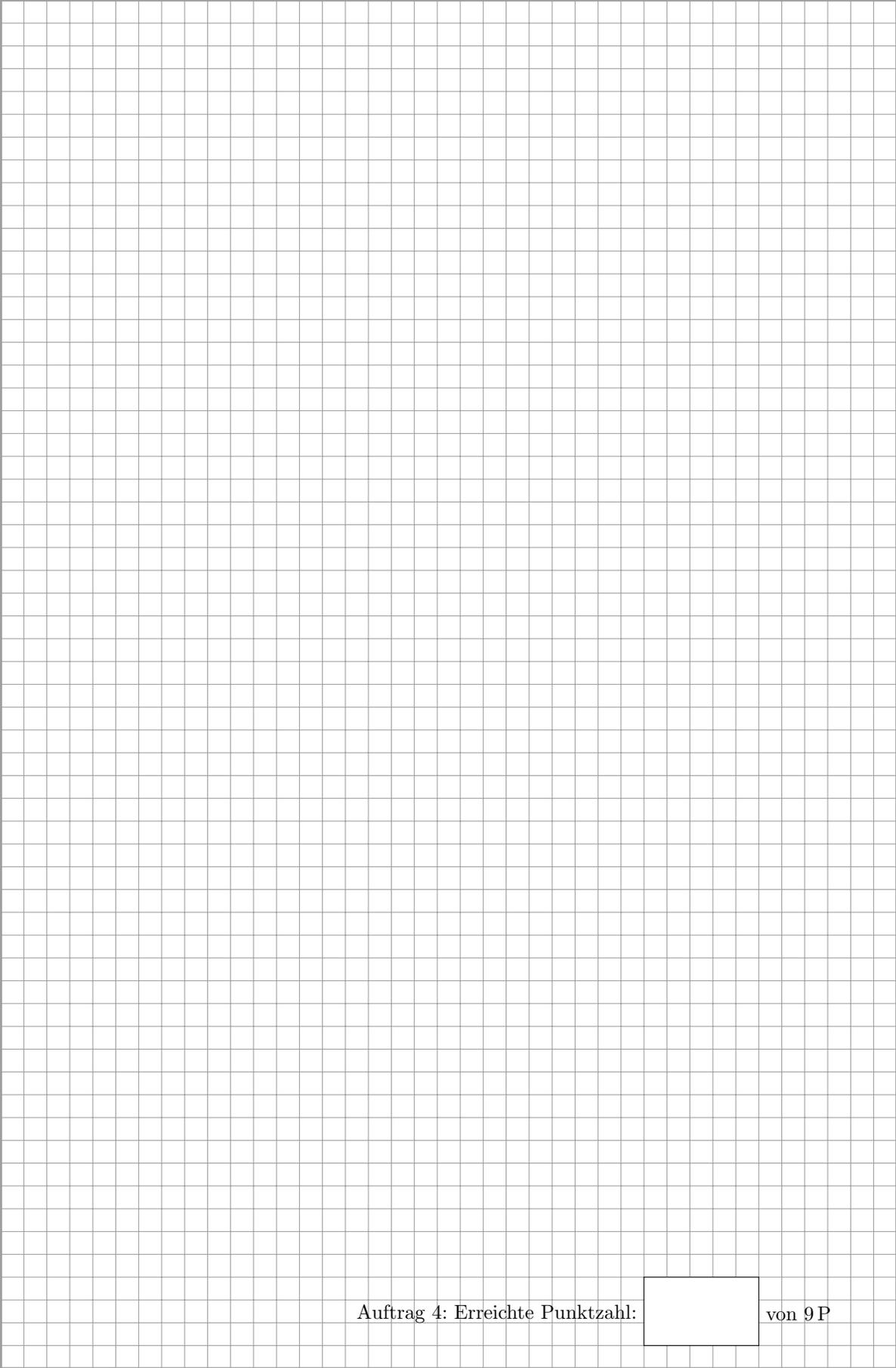


Abbildung 4: Fläche





A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 4: Erreichte Punktzahl:

von 9 P

Auftrag 5 (5 P)

Vom Punkt $P = (0, 2)$ ausgehend wird, gemäss Abbildung 5, ein Streckenzug mit unendlich vielen Strecken gezeichnet. Jede Strecke bildet mit der nachfolgenden Strecke einen rechten Winkel. Die Längen der Strecken sind so gewählt, dass diese eine geometrische Folge bilden.

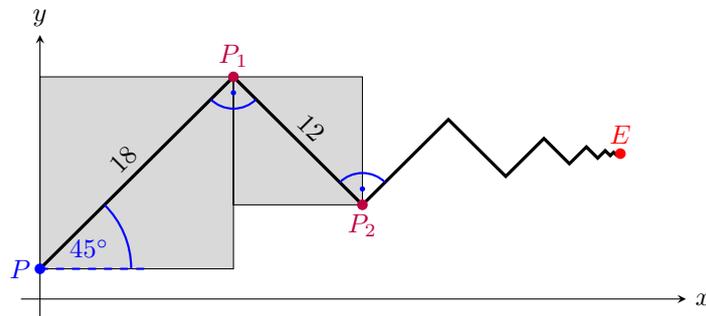
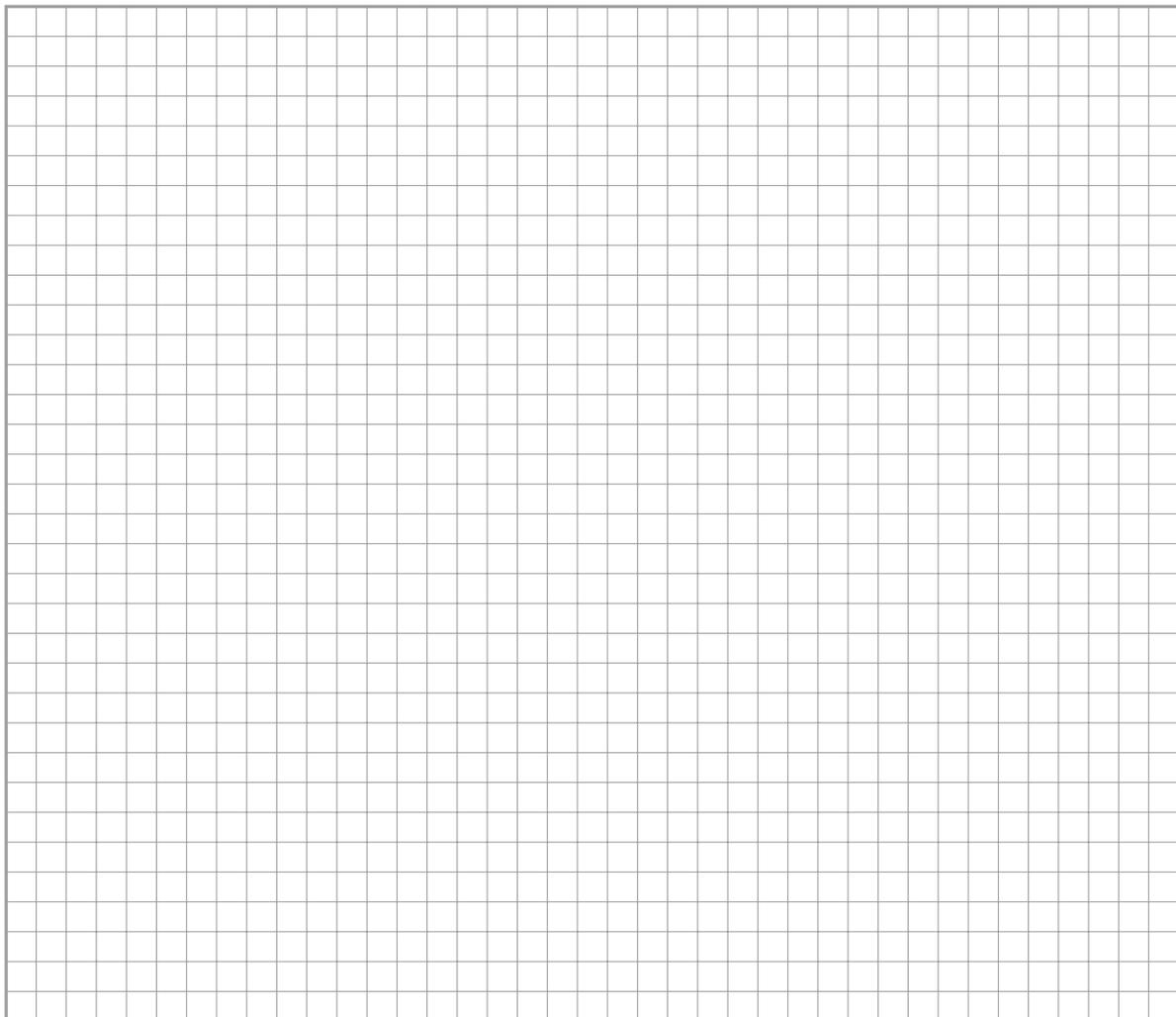
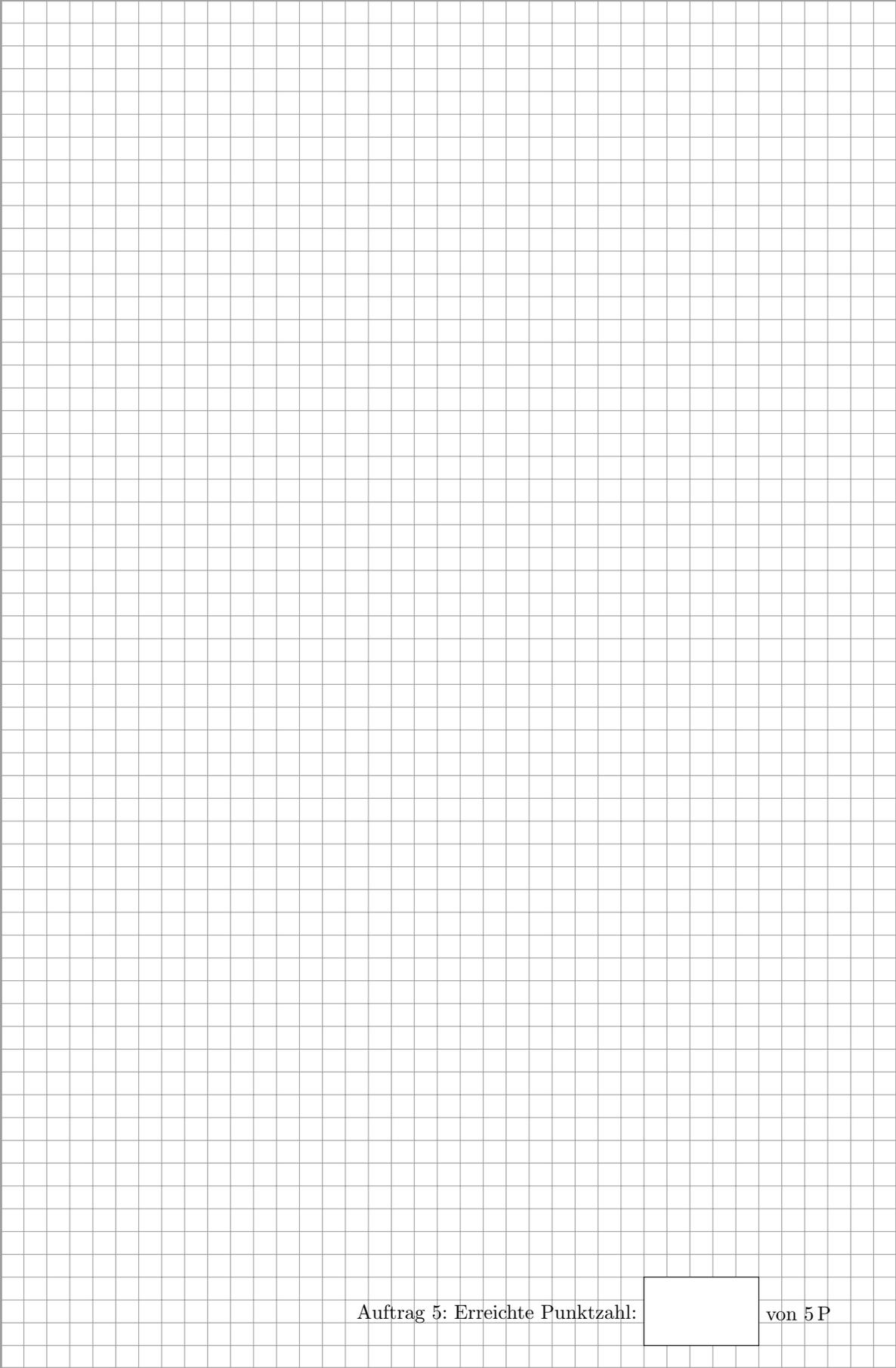


Abbildung 5: Skizze zu Auftrag 5

- (a) Berechnen Sie die x -Koordinaten von den Eckpunkten P_1 und P_2 . (1.5 P)
- (b) Berechnen Sie die Koordinaten des «Endpunktes» E . (3.5 P)





A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 5: Erreichte Punktzahl:

von 5 P

Auftrag 6 (5.5 P)

Für seine Abschlussarbeit als Chocolatier macht sich der Auszubildende Julian Gedanken über eine neue Praline:

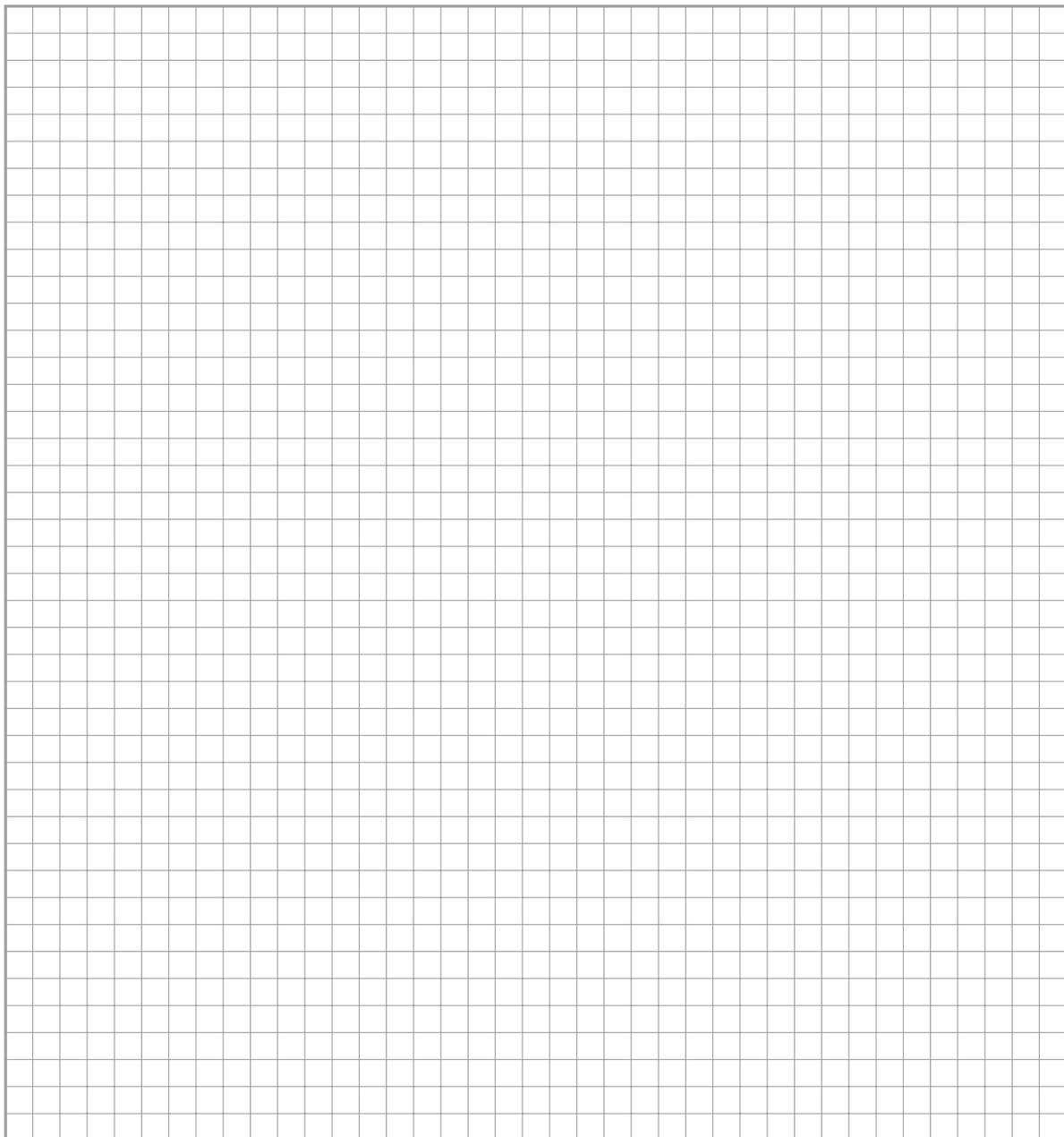
Das süsse Stück soll die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche haben. Das Besondere an dieser neuen Kreation ist die Zuckerglasur mit Goldstaub, die die sichtbare Oberfläche der Köstlichkeit bedecken soll. Die Praline soll ein Volumen von 12 cm^3 erreichen. Die exklusive Zuckerglasur ist so dünn, dass sie bei der Volumenberechnung vernachlässigt werden kann.

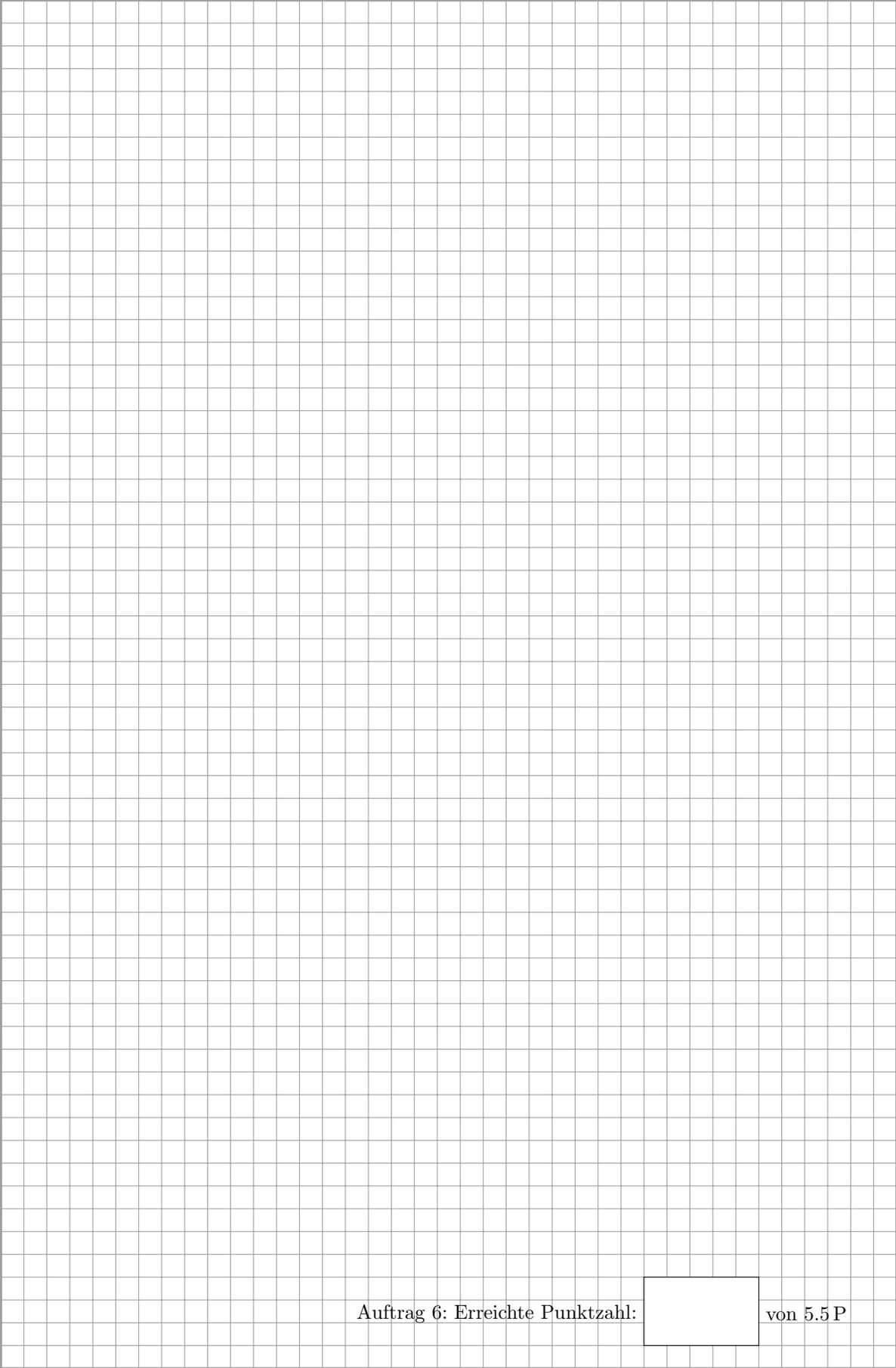
Dagegen ist der Preis dieser Glasur mit $1.00 \frac{\text{CHF}}{\text{cm}^2}$ nicht zu vernachlässigen. Für die Unterseite der Pyramide wird eine ähnliche Glasur mit weniger Goldanteil verwendet. Sie kostet $0.80 \frac{\text{CHF}}{\text{cm}^2}$.

Wie muss Julian die Höhe der Pyramide wählen, damit die Praline möglichst kostengünstig produziert werden kann?

(5.5 P)

Der Nachweis des Minimums ist nicht erforderlich.

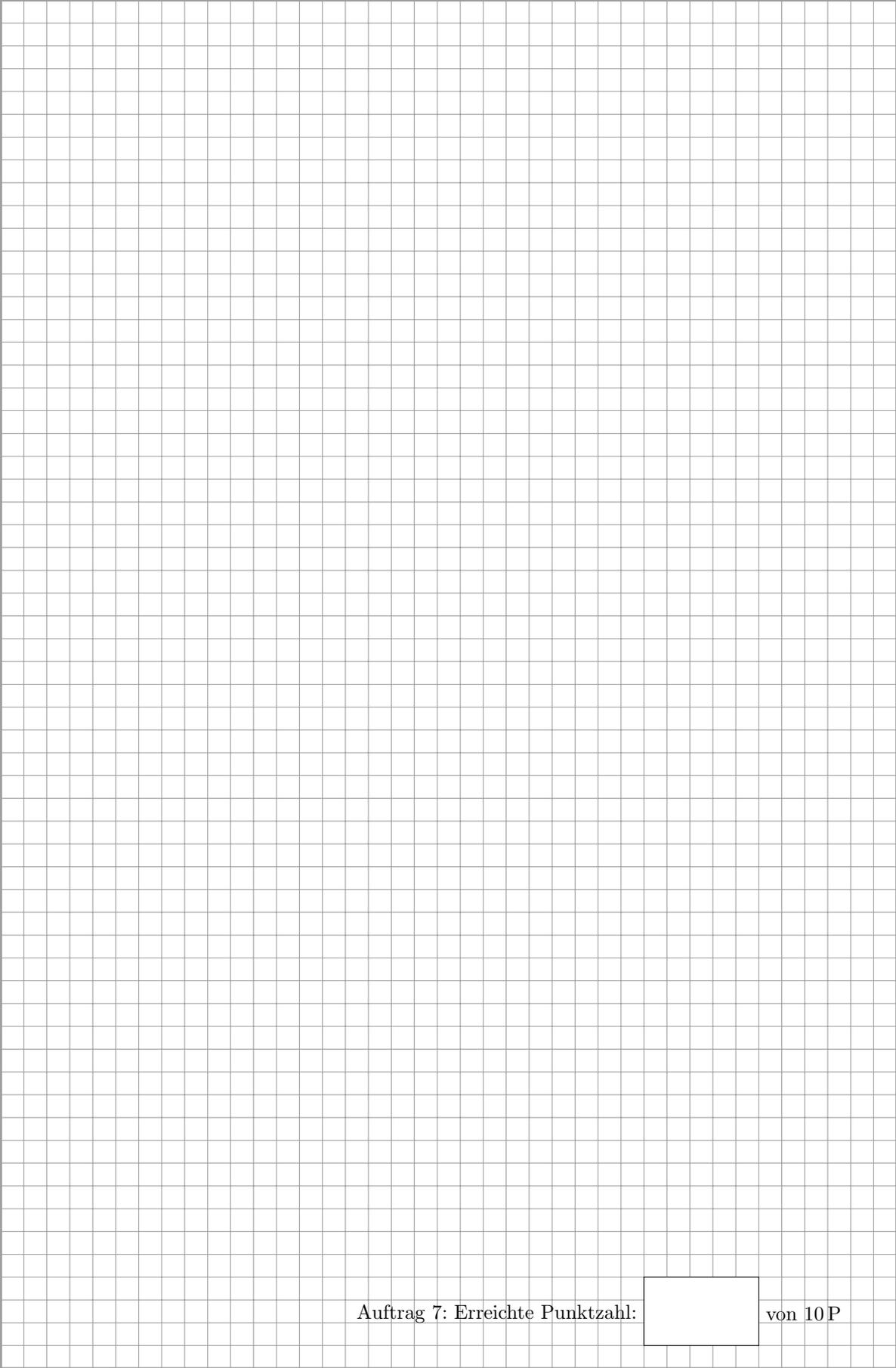




A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 6: Erreichte Punktzahl:

von 5.5 P



A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 7: Erreichte Punktzahl:

von 10 P

