# Schriftliche Maturprüfung in Mathematik

| **Name, Vorname:** | **Klasse:** |
|---|---|

Es gelten die folgenden Bestimmungen:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Der Lösungsweg zu allen Aufgaben, mit Ausnahme von Aufgaben 2. b) und Aufgabe 3, muss klar und vollständig sein. Der Einsatz des Taschenrechners (TI-*n*spire CX CAS) ist klar anzugeben. Zu Beginn der Prüfung muss der Speicher des Taschenrechners vollständig gelöscht sein.
- Die Prüfung besteht aus zwei Teilen:
  - Teil 1: Die Aufgaben 1 bis 3 sind ohne Taschenrechner zu lösen. Als einziges Hilfsmittel ist in diesem Teil die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen.

    Wenn Sie diesen Teil erledigt haben, legen Sie alle dazugehörigen Blätter (inklusive Aufgaben) in den vorhandenen Umschlag, kleben Sie diesen zu und geben ihn der Aufsichtsperson ab. Achtung: Nur diejenigen Blätter, die sich im zugeklebten Umschlag befinden, werden für die Bewertung des 1. Teils beachtet.
  - Teil 2: Nach Abgabe von Teil 1 erhalten Sie ihren Taschenrechner, um damit und mit der Formelsammlung die Aufgaben 4 bis 7 zu lösen.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

**Klasse** **Examinator/-in**

| **Aufgabe** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **mögliche Punkte** | 9.5 | 7 | 8 | 11 | 4.5 | 6 | 9.5 | 55.5 |
| **erreichte Punkte** | | | | | | | | |

| **Name, Vorname:** | **Klasse:** |
| --- | --- |

# Teil 1: Ohne Rechner


Abbildung 1: Taschenrechner nicht erlaubt[1]

Die Aufgaben 1 bis 3 sind ohne Taschenrechner zu lösen. Als einziges Hilfsmittel ist in diesem Teil die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen.

[1]Quelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/TI-Nspire` (cc) (12.1.2019), bearbeitet

**Aufgabe 1** (9.5 P)
Gegeben sei die Ebene $E: 2x + 2y + z + d = 0$ und die Kugel $K: (x-6)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 2^2$.

(a) Geben Sie die Gleichung der Geraden an, welche senkrecht zu $E$ und durch den Kugelmittelpunkt verläuft. (1 P)

(b) Es sei $d = -5$. Welcher Punkt der Ebene liegt der Kugel am nächsten? (1.5 P)

(c) Bestimmen Sie $d$ so, dass das Schnittgebilde von Ebene $E$ und Kugel $K$ ein Kreis von Radius 2 ist. (1.5 P)

(d) Bestimmen Sie $d$ so, dass die Ebene $E$ eine Tangentialebene an die Kugel $K$ wird. (2.5 P)

(e) Es sei $d = -2024$. Geben Sie eine Parametergleichung einer Geraden an, welche eine Tangente an die Kugel $K$ ist und parallel zur Ebene $E$ verläuft. (3 P)

**Aufgabe 2** (7 P)

Gegeben sei die Folge $a_n = \begin{pmatrix} 2n \\ 2 \end{pmatrix}$ , $n = 1, 2, 3 \ldots.$

(a) Unter der Voraussetzung, dass es sich bei den Folgegliedern um Vektoren handelt: Bestimmen Sie $n$, sodass die Summe der ersten $n$ Glieder einen Vektor ergibt, welcher senkrecht auf den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -22 \end{pmatrix}$ steht. (4 P)

(b) Unter der Voraussetzung, dass es sich bei den Folgegliedern um Binomialkoeffizienten handelt: Bestimmen Sie die drei kleinsten Folgeglieder, welche jeweils durch 23 teilbar sind. Es wird kein Lösungsweg verlangt. (3 P)

**Aufgabe 3** (8 P)
Bei den folgenden 16 Aussagen müssen Sie jeweils ankreuzen, ob sie wahr oder falsch sind. Es wird kein Lösungsweg verlangt.

Die Bewertung erfolgt nach folgendem Schema:

- korrekte Antwort: +0.5 P
- für die ersten vier falschen Antworten keinen Punkteabzug, ab dann für jede falsche Antwort: −0.5 P
- keine Antwort: 0 P

Das Minimum der Punktesumme beträgt 0 P.

| | wahr | falsch | |
|---|---|---|---|
| Wenn $a$ eine irrationale Zahl ist, dann ist auch $a + \sqrt{2}$ eine irrationale Zahl. | ☐ | ☐ | (0.5 P) |
| Wenn $a^2$ eine irrationale Zahl ist, dann ist auch $a$ eine irrationale Zahl. | ☐ | ☐ | (0.5 P) |
| Wenn zwei Parametergleichungen die gleiche Ebene beschreiben und im Aufpunkt sowie im ersten Richtungsvektor übereinstimmen, dann müssen die anderen beiden Richtungsvektoren kollinear sein. | ☐ | ☐ | (0.5 P) |
| Der maximale Definitionsbereich $\mathbb{D}$ der reellen Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}}$ ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. | ☐ | ☐ | (0.5 P) |
| Aus $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ folgt $\log_{(2\cdot 11\cdot 23)}(2024) = 3$. | ☐ | ☐ | (0.5 P) |
| $\ln(1+2+3) = \ln(1) + \ln(2) + \ln(3)$ | ☐ | ☐ | (0.5 P) |
| Wenn auf dem ersten Feld eines Schachbretts 3 Reiskörner liegen und auf jedem weiteren Feld doppelt so viele, dann liegen auf dem letzten Feld $3 \cdot 2^{64}$ Reiskörner. | ☐ | ☐ | (0.5 P) |
| Wenn die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ geometrisch ist, dann ist auch die Folge $a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \ldots$ geometrisch. | ☐ | ☐ | (0.5 P) |

| | wahr | falsch | |
|---|---|---|---|
| Wenn die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ arithmetisch ist (von 1. Ordnung), dann ist $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, \ldots$ eine geometrische Folge. | □ | □ | (0.5 P) |
| $z = 2024 + 2024 \cdot i$ erfüllt die Gleichung $\overline{z} - 2024 \cdot i = 2024$. | □ | □ | (0.5 P) |
| Der Graph der Funktion $f(t) = (t + i \cdot t^2) \cdot \mathrm{e}^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ beschreibt in der komplexen Zahlenebene eine Normalparabel, welche um den Ursprung um 45° im Gegenuhrzeigersinn gedreht wurde. | □ | □ | (0.5 P) |
| Die Menge $M = \{z \mid \lvert z-1\rvert - \lvert z+1\rvert = 1.5\} \subset \mathbb{C}$ definiert in der komplexen Zahlenebene keine vollständige Hyperbel, sondern nur einen Ast davon. | □ | □ | (0.5 P) |

Für die nächsten vier Aufgaben seien in einer Urne 8 Kugeln. 4 schwarze, nummeriert von 1 bis 4 und 4 rote, ebenfalls nummeriert von 1 bis 4.

| | wahr | falsch | |
|---|---|---|---|
| Es gibt $\binom{8}{4}$ verschiedene Farbmuster, die entstehen können, wenn man alle 8 Kugeln in eine Reihe legt. | □ | □ | (0.5 P) |
| Es gibt $\frac{2^4}{4!}$ verschiedene Farbmuster, die entstehen können, wenn man 4 Kugeln zieht und in eine Reihe legt. | □ | □ | (0.5 P) |
| Es gibt $\frac{8!}{4!}$ Möglichkeiten, 4 Kugeln aus der Urne zu ziehen und in eine Reihe zu legen. | □ | □ | (0.5 P) |
| Es gibt $\frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{4!}$ Möglichkeiten, wie man mit einem Griff 4 Kugeln ziehen kann, welche alle eine verschiedene Zahl tragen. | □ | □ | (0.5 P) |

| | |
|---|---|
| **Name, Vorname:** | **Klasse:** |

# Teil 2: Mit Rechner


Abbildung 2: Taschenrechner erlaubt[2]

Für die Aufgaben 4 bis 7 sind als Hilfsmittel der Taschenrechner (TI-$n$spire CX CAS) und die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen. Sie erhalten Ihren Taschenrechner nach der Abgabe von Teil 1.

[2]Quellen: `https://de.wikipedia.org/wiki/TI-Nspire` (cc) (12.1.2019) und `https://openclipart.org/detail/200606/primary-ok` (cc) (12.1.2019), bearbeitet

**Aufgabe 4** (11 P)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 1}$.

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f(x)$. (1 P)

(b) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von $f(x)$, welcher eine negative $x$-Koordinate besitzt. Abklärung nicht verlangt. (1.5 P)

(c) Berechnen Sie die Fläche, welche der gesamte Graph von $f(x)$ mit der $x$-Achse einschliesst. (1 P)

(d) Wird die Fläche aus der Teilaufgabe vorher um die $x$-Achse rotiert, entsteht ein unendlich langer Stab. An welchen beiden Stellen muss man parallel zur $y$-Achse schneiden, wenn man von diesem Stab ein Stück von Länge 1.5 herauschneiden will, dessen Volumen maximal ist? Abklärung des Maximums nicht verlangt. (3 P)

(e) Gegeben sei die Funktion $h(x) = \frac{a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x^2}{x^2 + 1}$. Bestimmen Sie die Parameter $a$ und $b$ so, dass die schiefe Asymptote von $h(x)$ eine Tangente an $g(x) = x^2$ wird und durch den Punkt $P(2/3)$ verläuft. (4.5 P)

**Aufgabe 5** (4.5 P)

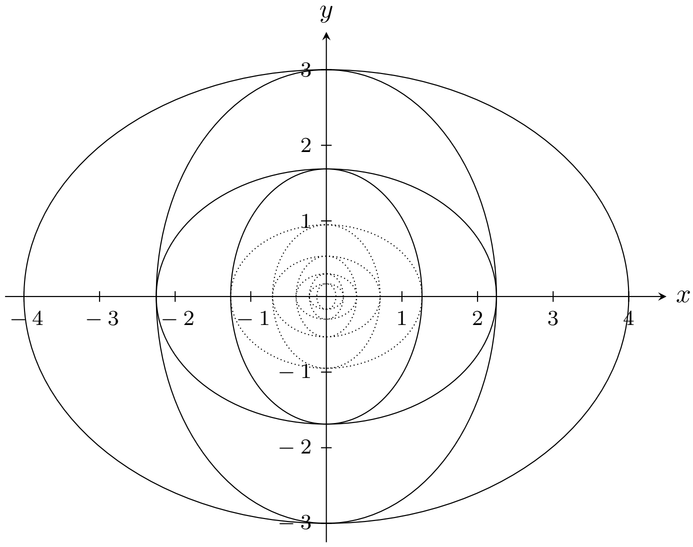


Abbildung 3: Ellipsen

(a) Geben Sie eine Gleichung für die grösste Ellipse in Abbildung 3 an. (1 P)

(b) Die Ellipse aus der Aufgabe vorher werde um 90° um den Ursprung gedreht und massstäblich so verkleinert, dass sie durch zwei Scheitelpunkte der ursprünglichen Ellipse geht. Die so entstehende Ellipse wird wiederum gedreht und verkleinert etc., siehe Abbildung Abbildung 3. Berechnen Sie die Summe der Flächen all dieser unendlich vielen Ellipsen. (3.5 P)

**Aufgabe 6** (6 P)
Die Funktion $f(t) = i \cdot 2 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{12} \cdot (-t)}, t = 0 \ldots 12$ beschreibt in der komplexen Zahlenebene die Position eines Stundenzeigers einer Uhr über den Zeitraum von 12 Stunden. Analog beschreibt die Funktion $g(t) = i \cdot 3 \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot (-t)}, t = 0 \ldots 12$ die Position des Minutenzeigers über 12 Stunden.

(a) Was ist der Mittelpunkt dieser Uhr und auf welche Punkte zeigen der Stunden- und der Minutenzeiger bei $t = 0$? (1 P)

(b) Auf welchen Punkt zeigt der Stundenzeiger um 9:23 Uhr? (Angabe des Punkts in Normalform) (1 P)

(c) Wie weit sind die Spitzen von Stunden- und Minutenzeiger um 10:17 Uhr voneinander entfernt? (2 P)

(d) Nun fassen wir die beiden Uhrzeiger als Kraftvektoren auf, welche am Mittelpunkt der Uhr angreifen. Zu welcher Uhrzeit nach 0:00 resultiert daraus zum ersten Mal am Mittelpunkt eine Kraft von Betrag 4? Angabe der Uhrzeit in Stunden und Minuten. (2 P)

**Aufgabe 7** (9.5 P)
Bei einem Torwandschiessen wird eine Serie von drei Bällen auf eine Linie gelegt und ein Schütze versucht, nacheinander alle drei Bälle im Tor unterzubringen. Gelingt ihm dies, hat er das Torwandschiessen gewonnen. Verschiesst er einen Ball, wird erneut eine Serie von drei Bällen aufgelegt.

(a) Schütze A gewinnt das Torwandschiessen in einer Serie mit einer Wahrscheinlichkeit von 51.2%. Welche Trefferwahrscheinlichkeit hat er für einen einzeln Ball, wenn sich diese während des Torwandschiessens nicht ändert? (1 P)

(b) Schütze B hat für jeden einzelnen Ball eine Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0.6$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat B eine Serie gewonnen, wenn man weiss, dass er den ersten Ball getroffen hat? (1 P)

(c) Ein Fussballprofi weiss, dass er im langjährigen Durchschnitt 1.6 Serien benötigt, um das Torwandschiessen zu gewinnen. Welche Trefferwahrscheinlichkeit hat er für einen einzelnen Ball? (2 P)

(d) Bei Schütze C werden die Regeln abgeändert: Bei jedem der drei Bälle wird zuerst mit einer fairen Münze ausgelost, ob ein roter oder ein weisser Ball hingelegt wird. Für rote Bälle beträgt die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0.7$, bei weissen $p = 0.9$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt C eine Serie? (2 P)

(e) Für Schütze D werden die Regeln wiederum abgeändert: Er hat die Serie schon gewonnen, wenn er mindestens zwei von drei Bällen trifft. Schütze D ist sehr stimmungsabhängig: Trifft er einen Ball, erhöht sich seine Trefferwahrscheinlichkeit für den nächsten Ball um 10%, verschiesst er jedoch, sinkt sie um 10%. Hat er beispielsweise vor einem Schuss eine Trefferwahrscheinlichkeit von 0.8, dann steigt diese nach einem Torerfolg für den nächsten Schuss auf 0.88, andernfalls sinkt sie auf 0.72. Die Wahrscheinlichkeit, dass er eine Serie gewinnt, beträgt 60%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er den ersten Ball trifft? (3.5 P)