# Schriftliche Maturprüfung in Mathematik

| Name, Vorname: | Klasse: |
|---|---|

Es gelten die folgenden Bestimmungen:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden (8:00–12:00).
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar) und Formelsammlung (Adrian Wetzel).
- Der Lösungsweg zu allen Aufträgen muss klar und vollständig sein.
- Die Schlussnote berechnet sich wie folgt:

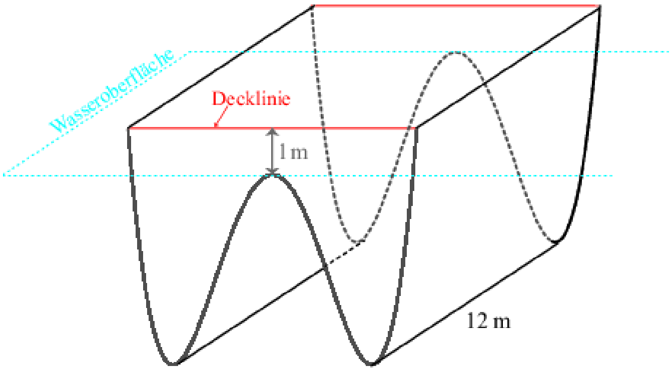
$$\text{Note} = \frac{5 \cdot \text{«erreichte Anzahl Punkte»}}{42} + 1 \text{ (gerundet auf halbe Noten)} = \boxed{\phantom{xxxx}}$$

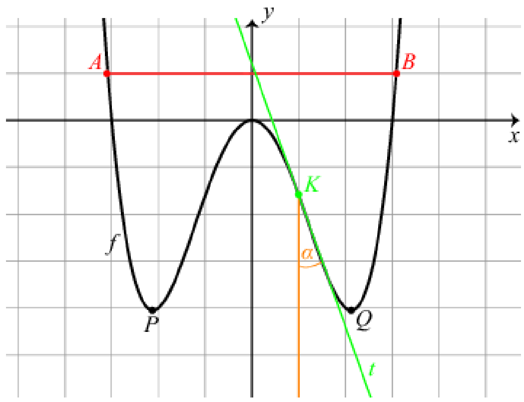
Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

| **Auftrag** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **mögliche Punkte** | 10.5 | 4 | 4.5 | 7.5 | 5 | 10 | 8 | 49.5 |
| **erreichte Punkte** | | | | | | | | |

**Auftrag 1** (10.5 P)

Auf einer Werft wird eine Hochgeschwindigkeitsfähre als *Doppelrumpfschiff* (Katamaran) geplant. Die Figur links zeigt den mittleren Teil des Schiffsrumpfes. Dieser Teil hat eine Länge von 12 m und der Querschnitt wird nach der Funktion $f(x) = 0.2 \cdot x^4 - 1.8 \cdot x^2$ hergestellt. Rechts sehen Sie den Graphen dieser Funktion (die Einheit ist Meter).




(a) Berechnen Sie den Abstand der beiden tiefsten Punkte des Schiffsrumpfes; das ist in der rechten Figur der Abstand zwischen den Punkten $P$ und $Q$. (1.5 P)

(b) Die *Decklinie* des Schiffsrumpfes entspricht in der rechten Figur der Strecke zwischen den Punkten $A = (x_A, 1)$ und $B = (x_B, 1)$. Berechnen Sie die Höhe des Schiffsrumpfes; das ist die Distanz zwischen dem Punkt $P$ und der Decklinie. (1.5 P)

(c) Berechnen Sie die Länge der Decklinie. (2.5 P)

(d) An den Schiffsrumpf soll für Unterwasserbeobachtungen eine Kamera angebracht werden. In der rechten Figur entspricht Punkt $K = (1, y_K)$ der Stelle, wo die Kamera angebracht wird. Man möchte wissen, wie gross der Blickwinkel der Kamera in Richtung Meeresgrund ist. Hierzu muss man eine Tangente durch den Punkt $K$ an den Graphen der Funktion $f$ legen. Ermitteln Sie die Gleichung dieser Tangente ($t$) und berechnen Sie den Blickwinkel $\alpha$. (2 P)

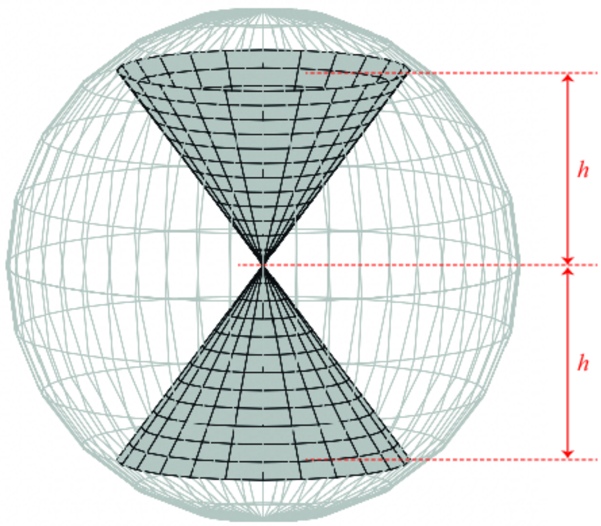
(e) Damit das Schiff «unsinkbar» ist, soll der Teil des Schiffsrumpfes, der sich unterhalb der Wasseroberfläche befindet, mit Styropor ausgefüllt werden. Berechnen Sie das Volumen an Styropor. (3 P)

Auftrag 1: Erreichte Punktzahl: von 10.5 P

**Auftrag 2** (4 P)

Ein *Doppelkegel* (zwei identische Kegel, mit gleicher Symmetrieachse und zusammenfallenden Spitzen) passt genau in eine Kugel mit Radius 10. Die Höhe eines Kegels nennen wir $h$. Das Volumen des Doppelkegels sollte möglichst gross sein.

Berechnen Sie, für welchen Wert von $h$ das Volumen maximal ist, und berechnen Sie das maximale Volumen. (4 P)



Auftrag 2: Erreichte Punktzahl: | | von 4 P

**Auftrag 3** (4.5 P)

Gegeben sind die folgenden drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Länge von $\vec{a}$. (1 P)

(b) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander. Bestimmen Sie die Komponente $z$. (1.5 P)

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms. (2 P)

Auftrag 3: Erreichte Punktzahl: von 4.5 P

**Auftrag 4** (7.5 P)

Von den zwei Geraden $g$ und $h$ sind die folgenden Informationen gegeben:

- Die Gerade $g$ hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und geht durch den Koordinatenursprung.
- Die Gerade $h$ hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und schneidet die Gerade $g$ im Punkt $P = (4,\, y_P,\, z_P)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden $g$. (1 P)

(b) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden $h$. (1 P)

(c) Die Geraden $g$ und $h$ spannen eine Ebene auf. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (0,\, 2,\, 1)$ zu dieser Ebene. (3 P)

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine Gerade $j$, die parallel zur Geraden $h$ und windschief zur Geraden $g$ verläuft. Begründen Sie, dass $j$ und $g$ tatsächlich windschief sind. (2.5 P)

Auftrag 4: Erreichte Punktzahl: von 7.5 P

**Auftrag 5** (5 P)

Vom Punkt $P = (0, 2)$ ausgehend wird, gemäss Abbildung 1, ein Streckenzug mit unendlich vielen Strecken gezeichnet. Jede Strecke bildet mit der nachfolgenden Strecke einen rechten Winkel. Die Längen der Strecken sind so gewählt, dass diese eine geometrische Folge bilden.

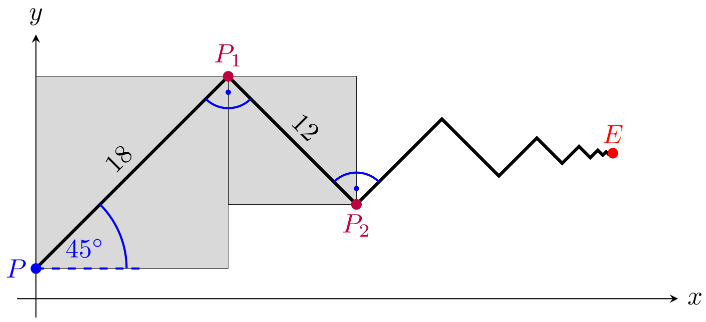



Abbildung 1: Skizze zu Auftrag 5

(a) Berechnen Sie die $x$-Koordinaten von den Eckpunkten $P_1$ und $P_2$. (1.5 P)

(b) Berechnen Sie die Koordinaten des «Endpunktes» $E$. (3.5 P)

Auftrag 5: Erreichte Punktzahl: von 5 P

**Auftrag 6** (10 P)

Ein Spielautomat hat drei identische Walzen. Jede dieser Walze hat genau die vier Symbole $\bigstar$, $\maltese$, $\blacklozenge$ und $\bullet$. Beim Einwurf einer Münze drehen sich die drei Walzen und halten irgendwann zufällig und unabhängig voneinander an. Im Stillstand zeigt jede Walze genau ein Bild.

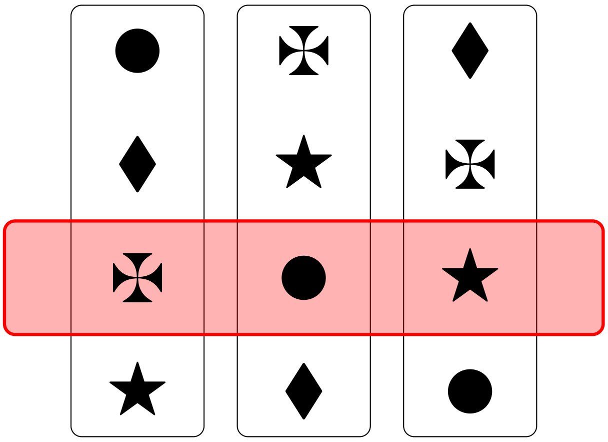


Abbildung 2: Walzen

- Der Spieleinsatz beträgt 1 CHF.
- Zeigen genau zwei Walzen dasselbe Symbol, beträgt die Auszahlung 2 CHF.
- Zeigen alle drei Walzen dasselbe Symbol, so gilt:
  - Sind es drei $\bigstar$, so beträgt die Auszahlung 20 CHF.
  - Sind es drei $\maltese$, so beträgt die Auszahlung 10 CHF.
  - Sind es drei $\blacklozenge$ oder drei $\bullet$, so beträgt die Auszahlung 5 CHF.
- Zeigen die Walzen drei verschiedene Symbole, so verliert der Spieler seinen Einsatz.

(a) Wie viele verschiedene Anordnungen der Symbole sind möglich, wenn die Reihenfolge unterschieden wird? (1 P)

(b) Wie viele verschiedene Anordnungen der Symbole sind möglich, wenn die Reihenfolge nicht unterschieden wird? (1.5 P)

(c) Wie viele verschiedene Anordnungen der Symbole sind möglich, wenn die Reihenfolge nicht unterschieden wird und eines der Symbole genau zweimal vorkommen muss? (1 P)

(d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Spiel zu verlieren? (1 P)

(e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler bei fünf Spielen mindestens einmal etwas gewinnt? (1 P)

(f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler bei fünf Spielen genau zweimal 20 CHF gewinnt und sonst immer verliert? (2 P)

(g) Welcher Gewinn oder Verlust ist unter den gegebenen Umständen pro Spiel zu erwarten? (2.5 P)

Auftrag 6: Erreichte Punktzahl: von 10 P

**Auftrag 7** (8 P)

Bei den folgenden 16 Aussagen müssen Sie jeweils ankreuzen, ob sie wahr oder falsch sind.

Die Bewertung erfolgt nach folgendem Schema:

- korrekte Antwort: +0.5 P
- die ersten vier inkorrekten Antworten: 0 P
- jede weitere inkorrekte Antwort: −0.5 P
- keine Antwort: 0 P

Das Minimum der Punktesumme beträgt 0 P.

(a) *Vektorgeometrie*

(i) Die Gerade

$$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2024 \\ 2024 \\ 2024 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2024 \\ 0 \\ 2024 \end{pmatrix}$$

durchstösst die Ebene mit der Gleichung

$$x + 2024 \cdot y - z = 0.$$

wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

---

(ii) Für zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ im dreidimensionalen Raum gilt immer

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0.$$

wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

---

(iii) Aus $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$ folgt $|\vec{v} + \vec{w}| = |\vec{v}| + |\vec{w}|$.

wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

(b) *Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik*

(i)

$$\binom{1000}{500} = \frac{1000!}{(500!)^2}$$

wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

---

(ii)

$$99! = \frac{100!}{2}$$

wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

---

(iii) Die Anzahl der Möglichkeiten, in einer Folge von 8 Münzwürfen genau drei Mal «Kopf» hintereinander zu erhalten, beträgt $\binom{8}{3}$.

wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

---

(iv) Ein Würfel wird 2024-mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, nie ⚅ zu werfen, ist strikt grösser als 0.

wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

(c) *Analysis*

(i) $$\int_{-2024}^{2024} x^2 \,\mathrm{d}x > 0$$ wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

(ii) $$\int_{-2024}^{\sqrt{2024}} x \,\mathrm{d}x > 0$$ wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

(iii) Der Inhalt der in Abbildung 3 grau hinterlegten Fläche ist

$$\left|\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

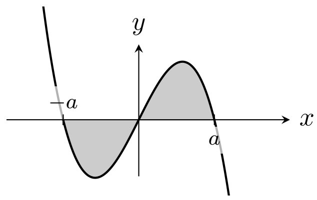



Abbildung 3: Graph der Funktion $f$ und graue Fläche

(iv) Die Funktion $f(x) = -6 - x^2$ hat mehr als eine Nullstelle. wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

(v) Der Graph einer Polynomfunktion hat immer mehr Extremstellen als Wendepunkte. wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

(vi) Der Graph einer Polynomfunktion fünften Grades kann vier Wendepunkte haben. wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

(vii) Es gibt eine Funktion $F$, welche eine Stammfunktion ist von sowohl $f(x) = x$ als auch $g(x) = x + 1$. wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

(viii) Wenn $f(x) = \sin(2 \cdot x)$, dann ist $f'(5 \cdot \pi) < 0$. wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

(ix) Die 2024-te Ableitung von $f(x) = \sin(2 \cdot x)$ ist $2^{2024} \cdot f(x)$. wahr ☐ falsch ☐ (0.5 P)

Auftrag 7: Erreichte Punktzahl: ☐ von 8 P