Final exam in Mathematics

Name:	**Class:**

The following rules apply:

- The duration of the exam is 4 hours.
- Additional Aid: English-German dictionary
- The solution process for all problems must be written down clearly and completely. Show your use of the calculator [1]. The memory of the calculator has to be cleared before the exam.
- The exam consists of two parts:
  - Part 1: Solve problems 1 to 4 with the aid of the mathematics formulary[2] only.
    Once you are finished solving this part, place all corresponding pages (including the exercise sheets) into the envelope provided. Seal the envelope and hand it in to the supervisor. (Attention: Only the pages in the sealed envelope will be considered for the assessment of part 1!)
  - Part 2: Once you hand in part 1 in a sealed envelope, you will receive your calculator. Solve problems 5 to 8 with the aid of your calculator and the mathematics formulary.
- The final grade is calculated as follows:

$$\text{Final grade} = \frac{5 \cdot \text{“achieved points”}}{40} + 1 \text{ (rounded to half a mark)} = \boxed{}$$

We wish you much success!

Class
—
—

Examiner
—
—

Problem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Total**
Possible Points	4.5	6	3.5	8	3.5	8	7	6.5	47
Achieved Points									

[1] TI-*n*spire CX CAS
[2] Adrian Wetzel. *Formelsammlung Mathematik*. 9th ed. 2021. ISBN: 978-3-9523907-1-9.

Name:	Class:

Part 1: Without Calculator

Figure 1: Without calculator[3]

Problems 1 to 4 have to be solved without the calculator. The only aid allowed in this part of the exam is the mathematics formulary.

[3]Wikimedia Commons. *TI-nspire CX CAS calculator*. Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. URL: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TI-nspire_CX_CAS.jpg` (visited on 11/12/2021)

Problem 1 (4.5 P)

(a) Berechnen Sie

$$\frac{3}{7+\mathrm{i}}$$

und geben Sie das Resultat in Normalform an. (1 P)

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit

$$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2\,\mathrm{P})$$

(c) Berechnen Sie

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2022}$$

und geben Sie das Resultat in Normalform an. (1.5 P)

Problem 1: achieved points: of 4.5 P

Problem 2 (6 P)
Samus befindet sich bei $S = (0, 0, 0)$ in einem Raum. Die spiegelnde schiefe Decke dieses Raumes ist die Ebene Φ. Die Ebene Φ enthält die Punkte

$$A = (4, 0, 7)\,,\ B = (6, 3, 9)\ \text{ und } C = (8, 2, 7)\,.$$

(a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene Φ. (2.5 P)

Hinweis: Falls Sie (a) nicht lösen können, rechnen Sie mit der Gleichung

$$\Phi:\ x - 2\cdot y + 2\cdot z - 18 = 0$$

weiter.

Nun befindet sich bei $G = (-1, 17, 13)$ ein Gegner.

(b) Zeigen Sie rechnerisch, dass sich Samus und der Gegner auf derselben Seite der Ebene Φ befinden. (1 P)

(c) Samus möchte den Gegner mit ihrer Laserkanone erledigen. Da aber die direkte Sicht zum Gegner versperrt ist, muss sie auf einen bestimmten Punkt der Ebene Φ zielen, so dass der Laserstrahl dort so reflektiert wird, dass der Gegner vom reflektierten Strahl getroffen wird.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g auf der sich der reflektierte Lichtstrahl befindet. (2.5 P)

Problem 2: achieved points: ____ of 6 P

Problem 3 (3.5 P)
Beweisen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n die Zahl

$$12^n - 7^n$$

durch 5 teilbar ist. (3.5 P)

Problem 3: achieved points: of 3.5 P

Problem 4 (8 P)
For the next 16 statements you need to decide if the statement is TRUE or FALSE.
This problem is graded as follows:

- Correct answer: +0.5 P
- The first four incorrect answers: 0 P
- Further incorrect answers: −0.5 P
- No answer: 0 P

Minimum possible points: 0 P.

(a)

	TRUE	FALSE	
$\cos(2022 \cdot \pi) = -1$	☐	☐	(0.5 P)
$2022^{\ln(1)} = 1$	☐	☐	(0.5 P)
$\mathrm{Im}\left((2023 + \mathrm{i} \cdot 2022)^4\right) > 0$	☐	☐	(0.5 P)
$\arg\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{3}$	☐	☐	(0.5 P)

(b) Gegeben sei der Rhombus $ABCD$ von Figure 2.

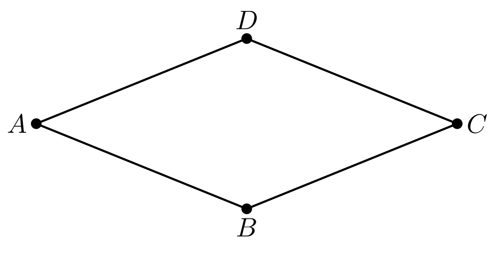

Figure 2: Rhombus

	TRUE	FALSE	
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$	☐	☐	(0.5 P)
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$	☐	☐	(0.5 P)
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$	☐	☐	(0.5 P)

(c) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2 \cdot (x-1).$$

	TRUE	FALSE	
$f'(1) = 0$	☐	☐	(0.5 P)
Der Graph von f hat einen Wendepunkt.	☐	☐	(0.5 P)
$f''(-3) < 0$	☐	☐	(0.5 P)
Es gilt $f(-4) \cdot f'(-4) < 0$	☐	☐	(0.5 P)

(d) Wir betrachten für die folgenden Aussagen die Ellipse

$$E: \frac{(x-2)^2}{2021} + \frac{(y-3)^2}{2022} = 1.$$

	TRUE	FALSE	
Der Mittelpunkt der Ellipse ist bei $(-2, -3)$	☐	☐	(0.5 P)
Die vertikale Halbachse der Ellipse ist grösser als die horizontale.	☐	☐	(0.5 P)

(e) Für die nachfolgenden Aussagen sei $X \sim \mathcal{N}(2022, 1)$.

	TRUE	FALSE	
$\mathrm{P}(X \geq 2022) = \mathrm{P}(X > 2022)$	☐	☐	(0.5 P)
$\mathrm{P}(X \leq 2022) = 0.5$	☐	☐	(0.5 P)
$\mathrm{P}(X > 2023) > 0.25.$	☐	☐	(0.5 P)

Problem 4: achieved points: ☐ of 8 P

Name:	Class:

Part 2: With Calculator

Figure 3: With Calculator [4]

Once you hand in part 1 in a sealed envelope you will receive your calculator. Solve problems 5 to 8 with the aid of your calculator and the mathematics formulary.

[4]Wikimedia Commons. *TI-nspire CX CAS calculator*. Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. URL: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TI-nspire_CX_CAS.jpg` (visited on 11/12/2021)

Problem 5 (3.5 P)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 - 2 \cdot x^3.$$

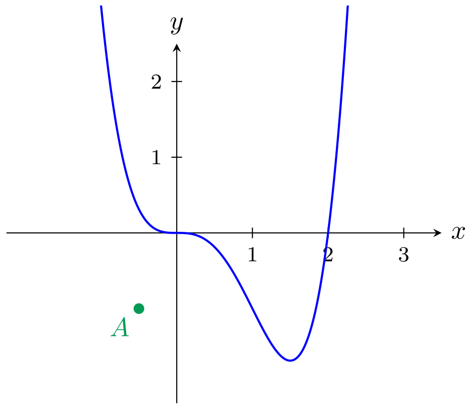

Figure 4: Skizze zu Problem 5

(a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangenten an den Graphen von f, welche diesen bei $x = 1$ berührt. (1 P)

(b) Wir legen nun durch den Punkt $A = (-0.5, -1)$ weitere Tangenten an den Graphen von f. Berechnen Sie die Koordinaten aller entsprechenden Berührpunkte. (2.5 P)

Problem 5: achieved points: of 3.5 P

Problem 6 (8 P)
Der böse Bernd und der ahnungslose Alfred essen oft gemeinsam zu Mittag. Sie werfen jeweils eine Münze, um zu bestimmen, wer das Essen zahlen soll. Bei Kopf zahlt Alfred, bei Zahl Bernd.
Bernd möchte nun Alfred ausnützen und besorgt sich eine gezinkte Münze, bei der die Wahrscheinlichkeit für Kopf 60% ist.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss Alfred genau 6 der nächsten 10 Mittagessen zahlen? (0.5 P)

(b) Alfred bemerkt, dass er in letzter Zeit eher öfter das Mittagessen zahlen muss. Nach 50 Mittagessen, hat er gezählt, dass er 30 mal bezahlen musste. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies (30 mal oder mehr bei 50 Würfen) mit einer fairen Münze passiert? (1 P)

(c) Alfred führt Buch über seine Beobachtung. Wie viele von 100 Mittagessen müsste er bezahlen, damit er stark vermuten kann, dass die Münze gefälscht ist (d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um eine faire Münze handelt fällt unter 5%)? (1.5 P)

(d) Alfred konfrontiert Bernd mit seinem Verdacht und schlägt folgendes vor: Sie werfen die Münze zweimal; falls "KZ" auftaucht, zahlt Bernd, falls "ZK" auftaucht zahlt Alfred und falls "KK" oder "ZZ" auftaucht, beginnt das ganze von Vorne bis einer gewinnt.

Zeigen Sie, dass dieses Vorgehen fair ist, unabhängig davon wie gross die Wahrscheinlichkeit für Kopf oder Zahl ist. (1 P)

Inspiriert von seinen Abenteuern mit Bernd, überlegt sich Alfred, welche Aussagen man über allgemeine Muster von Kopf und Zahl machen kann. Nachfolgend sind zwei Fragen, die er sich gestellt hat.

(e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Muster "ZKZ" in den ersten fünf Würfen einer fairen Münze vorkommt? (2 P)

(f) Wenn man eine faire Münze fünf Mal wirft, entsteht ein Muster der Länge 5. In wie vielen von diesen Mustern kommt kein Buchstabe drei mal direkt hinter einander vor. (Zum Beispiel sind "KZKZK" oder "ZKKZZ" zulässig, aber "KZZZK" nicht) (2 P)

Problem 6: achieved points: of 8 P

Problem 7 (7 P)
Die Ellipse E hat die Brennpunkte $F_1 = (-2, 0)$ und $F_2 = (8, 0)$ und geht durch $A = (6, 4)$.
Eine Parabel P hat den Brennpunkt F_2 und hat als Leitgerade die y-Achse.

(a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ellipse. (2 P)

(b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Parabel. (2.5 P)

Hinweis: Falls Sie (a) oder (b) nicht lösen können, rechnen Sie mit den Gleichungen

$$E : \frac{(x-4)^2}{50} + \frac{y^2}{29} = 1 \text{ und } P : y^2 = 7 \cdot (x - 5)$$

weiter.

(c) Die beiden Kurven haben im ersten Quadranten einen Schnittpunkt. Welchen Schnittwinkel haben sie dort? (2.5 P)

Problem 7: achieved points: of 7 P

Problem 8 (6.5 P)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 1 - x^2.$$

Nun wird die x-Achse im Uhrzeigersinn um den Winkel α um den Ursprung gedreht, bis die rotierte Gerade den Graphen von f zum ersten Mal rechtwinklig schneidet. Wir bezeichnen die rotierte Gerade mit g.

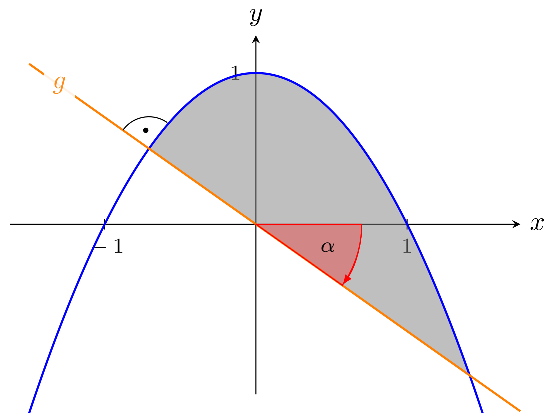

Figure 5: Skizze zu Problem 8(a) und (b)

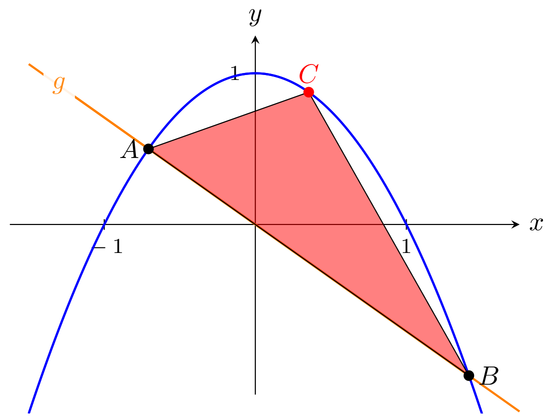

Figure 6: Skizze zu Problem 8(c)

(a) Berechnen Sie den Winkel α. (2.5 P)

Hinweis: Falls Sie Teil (a) nicht lösen können, rechnen Sie mit $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$ weiter.

(b) Berechnen Sie den Inhalt der in Figure 5 grau hinterlegten Fläche. (1.5 P)

(c) Wir bezeichnen die Schnittpunkte des Graphen von f und g mit A und B.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $C = (x_C,\, y_C)$ mit $x_A < x_C < x_B$ auf dem Graphen von f, so dass das Dreieck $\triangle ABC$ maximalen Flächeninhalt hat. Der Nachweis ist nicht zu erbringen. (2.5 P)

Problem 8: achieved points: of 6.5 P