Schriftliche Maturprüfung in Mathematik 2022

GYMNASIUM MUTTENZ

SPF: B, I, L, S, W, M, Z

Name, Vorname:	Klasse:

Es gelten die folgenden Bestimmungen:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Der Lösungsweg zu allen Aufträgen muss klar und vollständig sein. Der Einsatz des Taschenrechners ist klar anzugeben. Zu Beginn der Prüfung muss der Speicher des Taschenrechners vollständig gelöscht sein.
- Die Prüfung besteht aus zwei Teilen:
  - Teil 1: Die Aufgaben 1 und 2 sind ohne Taschenrechner zu lösen. Als einziges Hilfsmittel ist in diesem Teil die Formelsammlung von Adrian Wetzel zugelassen.

    Wenn Sie diesen Teil erledigt haben, legen Sie alle dazugehörigen Blätter (inklusive Aufträge) in den vorhandenen Umschlag, kleben Sie diesen zu und geben ihn der Aufsichtsperson ab (Achtung: Nur diejenigen Blätter, die sich im zugeklebten Umschlag befinden, werden für die Bewertung des 1. Teils beachtet).
  - Teil 2: Nach Abgabe von Teil 1 erhalten Sie Ihren Taschenrechner (TI-Nspire CAS), um damit und mit der Formelsammlung die Aufgaben 3 bis 6 zu lösen.
- Die Schlussnote berechnet sich wie folgt:

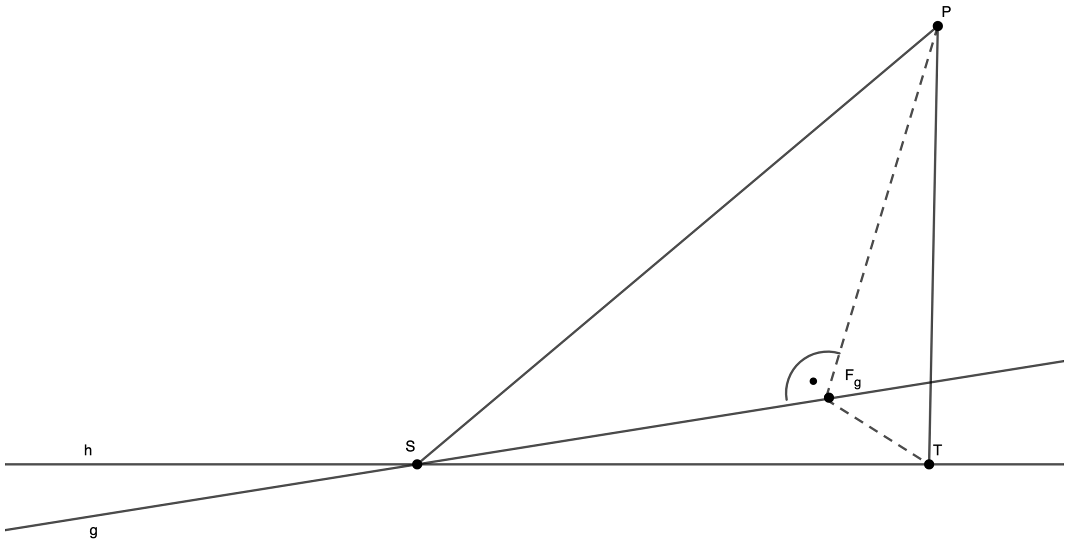
$$\text{Note} = \frac{5 \cdot \text{«erreichte Anzahl Punkte»}}{42} + 1 \text{ (gerundet auf halbe Noten)} = \boxed{}$$

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. **Vektorgeometrie ohne TR (10.5P)**

Gegeben sind die Punkte $P(8/12/1)$, $S(1/2/3)$ und $T(9/10/-1)$ und die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Gerade h verläuft durch die Punkte S und T.



(a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{TP}$ und zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{TP}$ senkrecht zur Geraden h verläuft. (2P)

(b) Die Ebene E wird durch die Geraden g und h aufgespannt. Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{TP}$ senkrecht auf der Ebene E steht. (1.5P)

(c) Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt S. Zeigen Sie, dass zwischen den Geraden g und h der Schnittwinkel $\alpha = 45°$ beträgt. (2P)

(d) F_g ist der Fusspunkt des Lotes, das von P aus auf die Gerade g gefällt wird. Berechnen Sie die Koordinaten des Fusspunktes F_g. (3P)

(e) Die Punkte P, S, T und F_g bilden die Eckpunkte einer schiefen Pyramide. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. (Hinweis: Wurzeln dürfen stehen gelassen werden.) (2P)

2. MC-Aufgaben ohne TR (8.5 Pkte)

Bei den folgenden Aussagen müssen Sie jeweils ankreuzen, ob sie wahr oder falsch sind.
Die Bewertung erfolgt nach folgendem Schema:

- korrekte Antwort: $+0.5$P
- die ersten vier inkorrekten Antworten: 0P
- jede weitere inkorrekte Antwort: -0.5P
- keine Antwort: 0P

Das Minimum der Punktesumme beträgt 0.

		richtig	falsch
(a)	Für zwei verschiedene Punkte A und B gilt immer $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ und $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BA}\rvert$		

		richtig	falsch
(b)	Der Betrag des Vektorprodukts zweier nicht kollinearer Vektoren ist gleich der Dreiecksfläche, die durch diese beiden Vektoren aufgespannt wird.		

		richtig	falsch
(c)	Sei l eine Gerade und E eine Ebene, die beide in Parameterform gegeben sind. Wenn die Gleichung $l = E$ die Lösung $0 = 0$ hat, dann bedeutet das, dass sich die Gerade und die Ebene nie berühren.		

		richtig	falsch
(d)	Die Gerade $l : \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zur Ebene $E : x - 3y - 2z - 1 = 0$		

		richtig	falsch
(e)	Zwei parallele Ebenen E_1 und E_2 haben die gleichen Achsenabschnitte.		

		richtig	falsch
(f)	Sei l eine Gerade mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ und E eine Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}$. Wenn sich die Ebene E und die Gerade l in einem Punkt schneiden, dann müssen $\vec{v}$ und $\vec{n}$ parallel sein.		

		richtig	falsch
(g)	Es gibt Folgen, die gegen 0 konvergieren und deren Folgenglieder alle positiv sind.		

		richtig	falsch
(h)	Alle Folgen, deren Folgenglieder wechselnde Vorzeichen haben, divergieren.		

		richtig	falsch
(i)	Die Folgen $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n}$, $b_n = 10.5 \cdot \frac{1}{n}$ und $c_n = n \cdot \frac{3}{\sqrt{n}}$ haben denselben Grenzwert für $n \to \infty$.		

		richtig	falsch
(j)	Der Graph der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat garantiert zwei Nullstellen, wenn gilt: $a < 0$ und $c > 0$.		

		richtig	falsch
(k)	Der Graph der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat garantiert zwei Nullstellen, wenn gilt: $a < 0$ und $c < 0$.		

		richtig	falsch
(l)	Die 2022. Ableitung der Funktion mit der Gleichung $h(x) = \sin(x) + cos(x)$ ist $h^{2022}(x) = -h(x)$.		

		richtig	falsch
(m)	$\int_{-1/2}^{1/2} (2)\ dx \qquad > \qquad \int_{-2}^{2} (\frac{1}{2})\ dx$		

		richtig	falsch
(n)	Wenn eine Polynomfunktion achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse ist, dann ist ihre erste Ableitungsfunktion punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.		

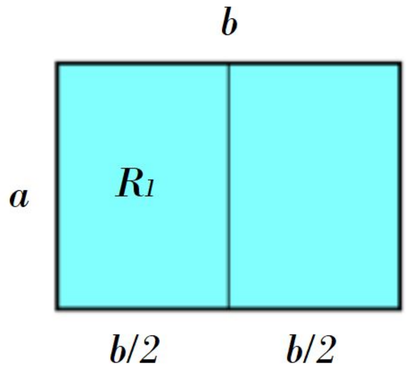
		richtig	falsch
(o)	Die Ableitungsfunktionen der beiden Funktionen mit den Gleichungen $f(x) = e^6 \cdot e^x$ und $g(x) = e^{x-6}$ stimmen überein.		

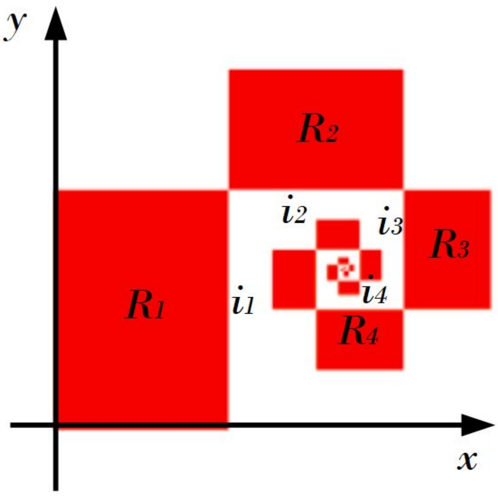
		richtig	falsch
(p)	Bei einem Multiple Choice Test gibt es 4 Fragen mit je drei möglichen Antworten, aber jeweils nur eine Antwort stimmt. Bei zufälligem Ankreuzen ist die Wahrscheinlichkeit genau eine Frage richtig beantwortet zu haben, $p = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^3$.		

		richtig	falsch
(q)	Die Wahrscheinlichkeit mit einem guten Würfel in drei Würfen mindestens zweimal die Augenzahl 6 zu würfeln beträgt: $p = \frac{2}{27}$.		

3. **Folgen & Reihen mit TR (9.5P)**

Ein rechteckiges Blatt Papier mit den Seitenlängen $a = 1$ und $b = \sqrt{2}$ wird so in zwei Rechtecke auseinander geschnitten, dass die lange Seite b halbiert wird. Das eine Rechteck R_1 wird rot gefärbt und wie in der Darstellung in ein Koordinatensystem gelegt. Das zweite Rechteck wird wieder so in zwei Rechtecke geschnitten, dass die lange Seite a halbiert wird. Das eine Rechteck R_2 wird wie in der Darstellung rechtwinklig übers Eck an das erste rote Rechteck R_1 angefügt. Auf die gleiche Art und Weise werden immer weitere Rechtecke R_3, R_4, ... an die Figur angefügt.





Geben Sie für alle folgenden Teilaufgaben exakte Resultate an.

(a) Berechnen Sie die Längen der langen Rechtecksseiten i_1, i_2 und i_3 sowie die Flächeninhalte der Rechtecke R_1, R_2 und R_3. [2P]

(b) Die Flächeninhalte der Rechtecke bilden eine geometrische Folge. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der ersten zehn Rechtecke R_1 bis R_{10}. [2P]

(c) Berechnen Sie den Grenzwert, gegen den die Summe aller Rechtecksflächeninhalte konvergiert. [1P]

(d) Die Längen der langen Rechtecksseiten i_1, i_2, i_3, ... bilden ebenfalls eine geometrische Folge. Der Streckenzug i_1, i_2, i_3, ... kann als Spirale aufgefasst werden, die gegen einen Punkt P konvergiert.

   i. Berechnen Sie die y-Koordinate des Punktes P. [2P]

   ii. Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes P. [2.5P]

4. **Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit mit TR (10P)**

(Hinweis: Resultate dürfen auch Fakultäten, Potenzen und Binomialkoeffizienten enthalten!)

Die Abschlussklassen des Gym Muttenz müssen ihre Abschlussreise in der Schweiz planen. Zwei Klassen entscheiden sich zusammen für ein Zeltlager ins Tessin zu fahren. Insgesamt nehmen 28 Schüler und 18 Schülerinnen am Zeltlager teil. Im Zeltlager gibt es für die Damen jeweils ein 6er Zelt, ein 5er Zelt, ein 4er Zelt und ein 3er-Zelt. Für die Herren stehen zwei 10er und ein 8er Zelt zur Verfügung.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Schülerinnen in die 4 Damenzelte zu verteilen? (1.5P)

(b) Für jedes der sieben Zelte wird eine Zeltsprecherin bzw. ein Zeltsprecher ernannt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese zu ernennen? (1P)

(c) Nachdem die Zelte bezogen sind, wird für besondere Anliegen der Klassen aus jedem Zelt eine Zweierdelegation entsandt. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Zusammensetzung dieses Gremiums? (1P)

Ein Highlight der Woche ist, am Mittwoch in der Verzasca einen Kurs in Riverrafting zu besuchen. Die Rafting-Guides haben folgende Erfahrung gemacht: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer über Bord geht, liegt bei jungen Männern erfahrungsgemäss bei 10% und bei jungen Frauen lediglich bei 6%.
Alle Teilnehmenden des Zeltlagers sind bei der Rafting-Tour dabei.

(d) i. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass niemand über Bord geht? (1P)

ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen von allen Teilnehmern genau drei Schülerinnen über Bord? (2P)

iii. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Person über Bord geht? (2P)

(e) Die Teilnehmenden des Zeltlagers werden für die Rafting-Tour in zwei Gruppen zu je 23 Personen aufgeteilt. Die Aufteilung erfolgt zufällig. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Gruppe aus 10 Damen und 13 Herren besteht. (1.5P)

5. **Differential und Integralrechnung mit TR (9.5P)**

Gegeben sind die Funktionen:

$f(x) = \frac{1}{t} \cdot x^2$ und $h(x) = -\frac{1}{t} \cdot x^2 + x + t$ mit $t \in \mathbb{R}^+$.

(a) Die beiden Graphen dieser Funktionen schneiden sich in den Punkten A und B. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte in Abhängigkeit von t. (1.5P)

(b) Eine Gerade g geht ebenfalls durch die Schnittpunkte A und B. Berechnen Sie die Gleichung der Geraden. (1P)

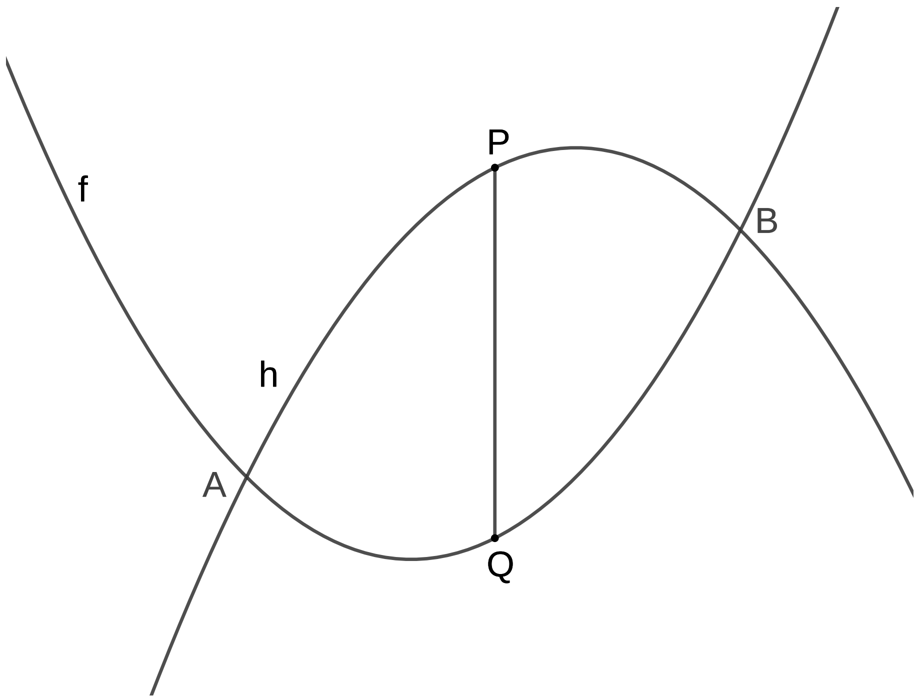
(c) Für welchen t-Wert ergibt die von den beiden Graphen eingeschlossene Fläche F den Wert 18? (1.5P)

Für die weiteren Teilaufgaben setzen Sie t=8 ein.

(d) Zeigen Sie, dass die Gerade g die von den beiden Graphen eingeschlossene Fläche F in zwei flächengleiche Teile zerlegt. (1P)

(e) Berechnen Sie eine weitere Parabelgleichung p zweiten Grades, die durch die beiden Punkte A und B verläuft und mit der Geraden g eine Fläche vom Wert A=48 einschliesst. (2.5P)

(f) Zwischen den beiden Schnittpunkten A und B liegt der Punkt P auf dem Graphen von h und der Punkt Q auf dem Graphen von f. Die Strecke $\overline{PQ}$ verläuft parallel zur y-Achse und soll möglichst lang sein. Berechnen Sie die Koordinaten von P und Q und die Länge der Strecke $\overline{PQ}$. (2P)



6. **Differential- und Integralrechnung mit TR (3P)**

Gegeben sei eine Kreislinie mit dem Mittelpunkt $(0/0)$ und dem Radius 10. In diese Kreislinie wird ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften gezeichnet:

- A, B und C liegen auf der Kreislinie k.
- A und B haben den gleichen positiven y-Wert.
- C hat die Koordinaten $C(0/-10)$.

Berechnen Sie die Koordinaten von A so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist. (Hinweis: Der Nachweis für das Maximum muss nicht erbracht werden.)