

SCHRIFTLICHE MATURPRÜFUNG IN MATHEMATIK



Name, Vorname:	Klasse:
-----------------------	----------------

Es gelten die folgenden Bestimmungen:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Der Lösungsweg zu allen Aufträgen muss klar und vollständig sein. Der Einsatz des Taschenrechners¹ ist klar anzugeben. Zu Beginn der Prüfung muss der Speicher des Taschenrechners vollständig gelöscht sein.
- Die Prüfung besteht aus zwei Teilen:
 - Teil 1: Die Aufträge 1 bis 4 sind ohne Taschenrechner zu lösen. Als einziges Hilfsmittel ist in diesem Teil die Formelsammlung² zugelassen.
Wenn Sie diesen Teil erledigt haben, legen Sie alle dazugehörigen Blätter (inklusive Aufträge) in den vorhandenen Umschlag, kleben Sie diesen zu und geben ihn der Aufsichtsperson ab (Achtung: Nur diejenigen Blätter, die sich im zugeklebten Umschlag befinden, werden für die Bewertung des 1. Teils beachtet).
 - Teil 2: Nach Abgabe von Teil 1 erhalten Sie Ihren Taschenrechner, um damit und mit der Formelsammlung die Aufträge 5 bis 8 zu lösen.
- Die Schlussnote berechnet sich wie folgt:

$$\text{Note} = \frac{5 \cdot \text{«erreichte Anzahl Punkte»}}{40} + 1 \text{ (gerundet auf halbe Noten)} =$$

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Klasse

—
—

Examinator/-in

—
—

Auftrag	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
mögliche Punkte	4.5	6	3.5	8	3.5	8	7	6.5	47
erreichte Punkte									

¹TI-nspire CX CAS

²Adrian Wetzel. *Formelsammlung Mathematik*. 9. Aufl. 2021. ISBN: 978-3-9523907-1-9.

Name, Vorname:

Klasse:

Teil 1: Ohne Rechner



Abbildung 1: Taschenrechner nicht erlaubt³

Die Aufträge 1 bis 4 sind ohne Taschenrechner zu lösen. Als einziges Hilfsmittel ist in diesem Teil die Formelsammlung zugelassen.

³Wikimedia Commons. *TI-nspire CX CAS calculator*. Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TI-nspire_CX_CAS.jpg (besucht am 12.11.2021)

Auftrag 1 (4.5 P)

(a) Berechnen Sie

$$\frac{3}{7+i}$$

und geben Sie das Resultat in Normalform an.

(1 P)

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit

$$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

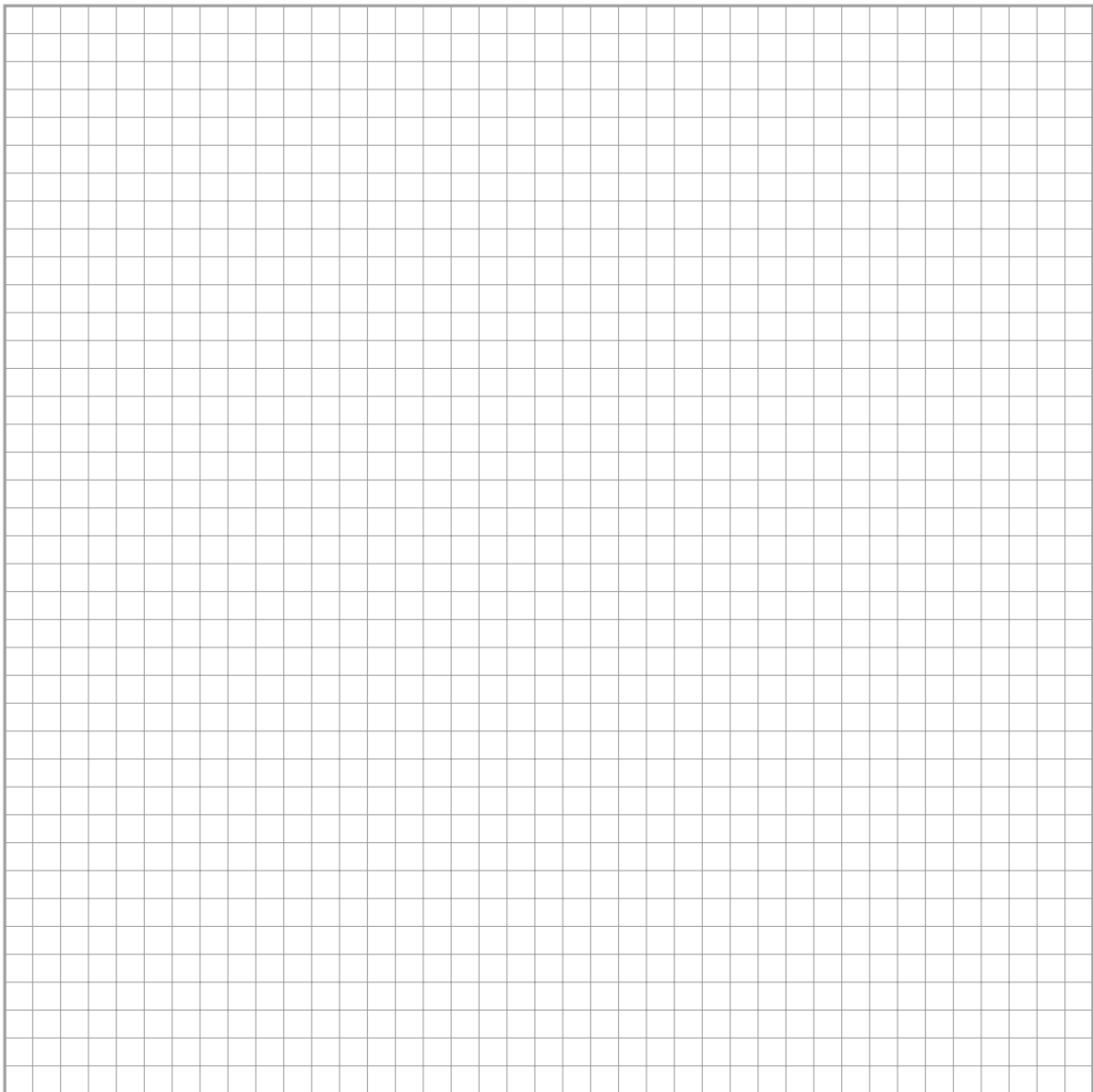
(2 P)

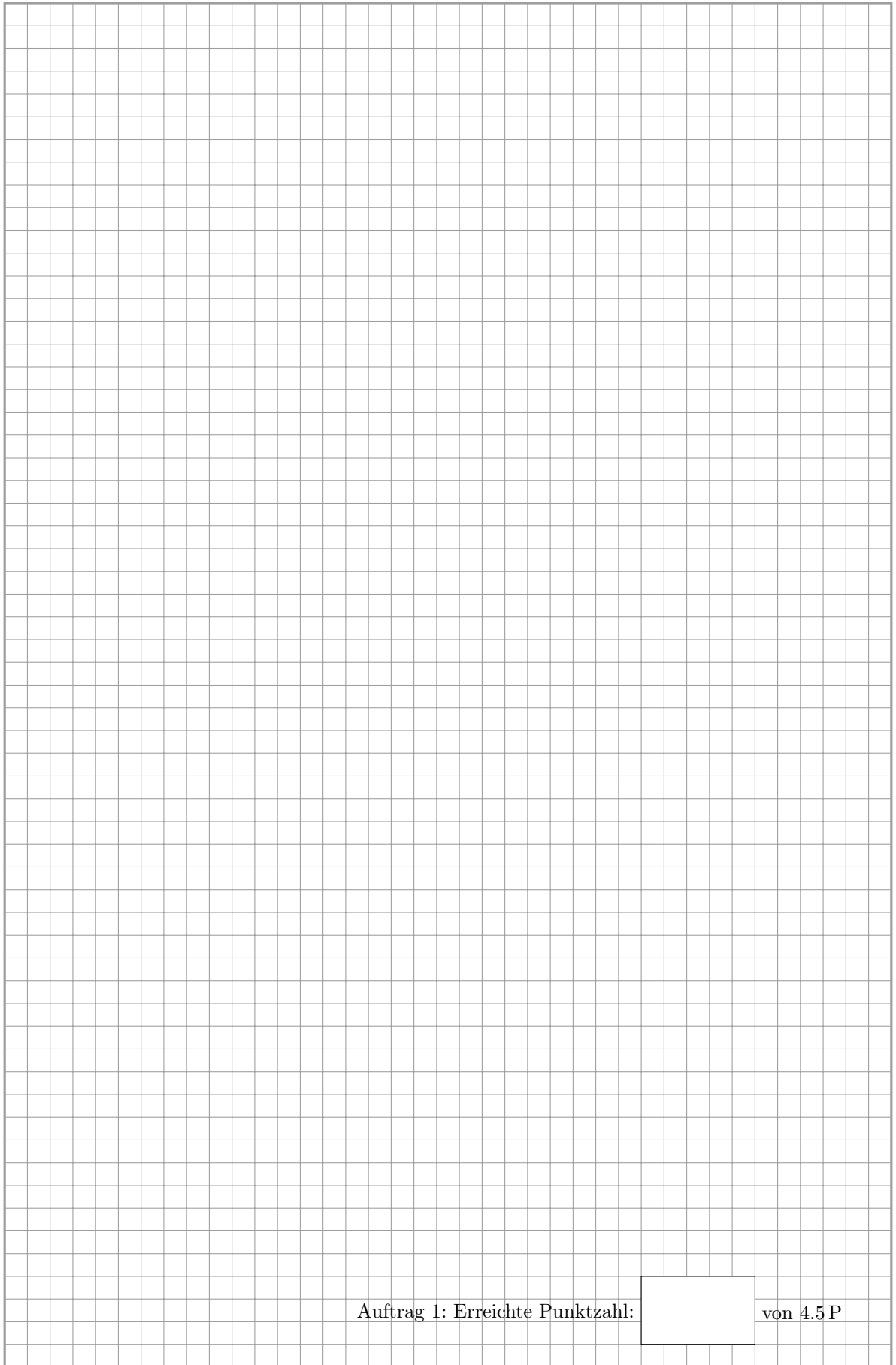
(c) Berechnen Sie

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2022}$$

und geben Sie das Resultat in Normalform an.

(1.5 P)





A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 1: Erreichte Punktzahl:

von 4.5 P

Auftrag 2 (6 P)

Samus befindet sich bei $S = (0, 0, 0)$ in einem Raum. Die spiegelnde schiefe Decke dieses Raumes ist die Ebene Φ . Die Ebene Φ enthält die Punkte

$$A = (4, 0, 7), B = (6, 3, 9) \text{ und } C = (8, 2, 7).$$

- (a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene Φ .

(2.5 P)

Hinweis: Falls Sie (a) nicht lösen können, rechnen Sie mit der Gleichung

$$\Phi: x - 2 \cdot y + 2 \cdot z - 18 = 0$$

weiter.

Nun befindet sich bei $G = (-1, 17, 13)$ ein Gegner.

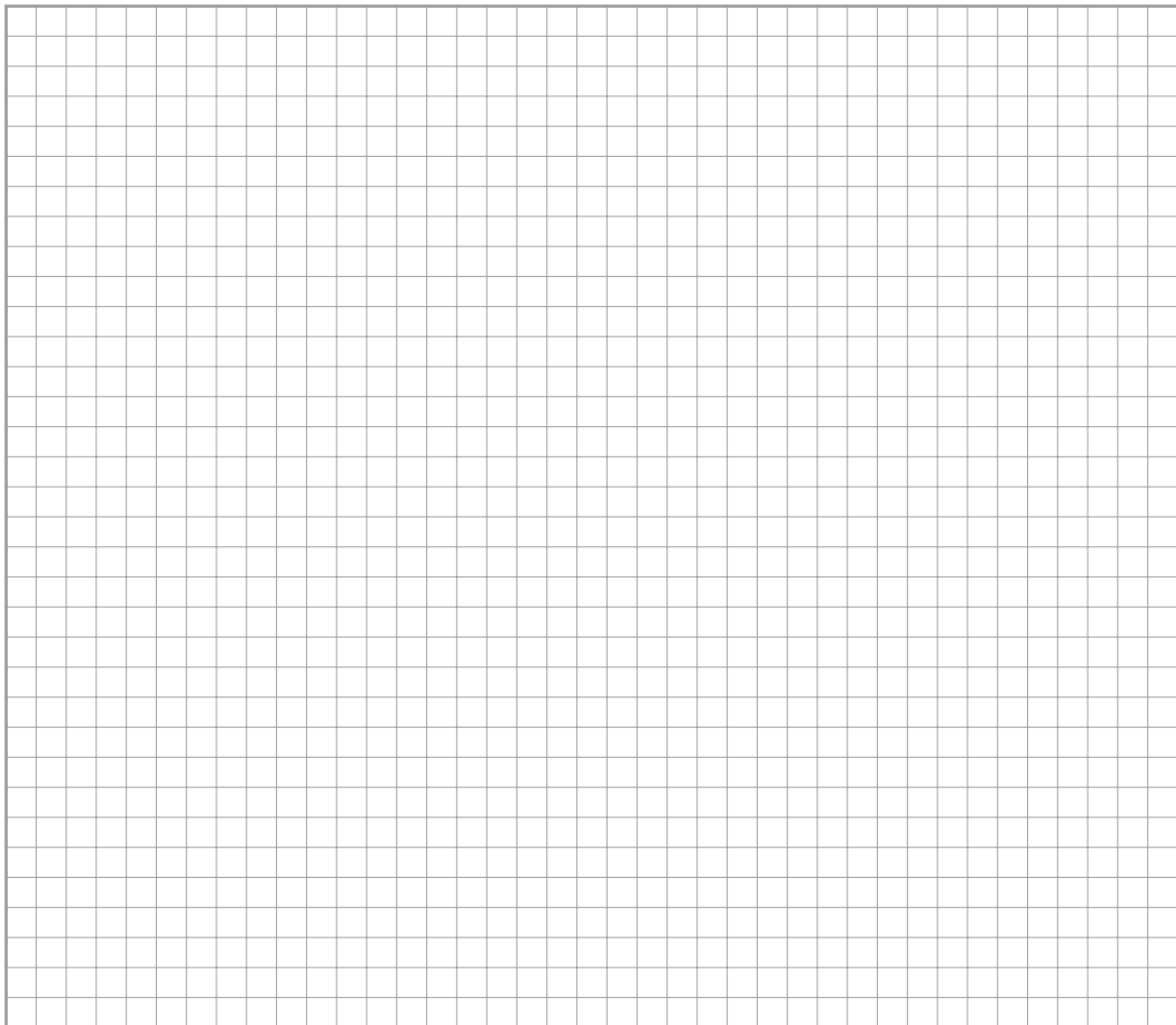
- (b) Zeigen Sie rechnerisch, dass sich Samus und der Gegner auf derselben Seite der Ebene Φ befinden.

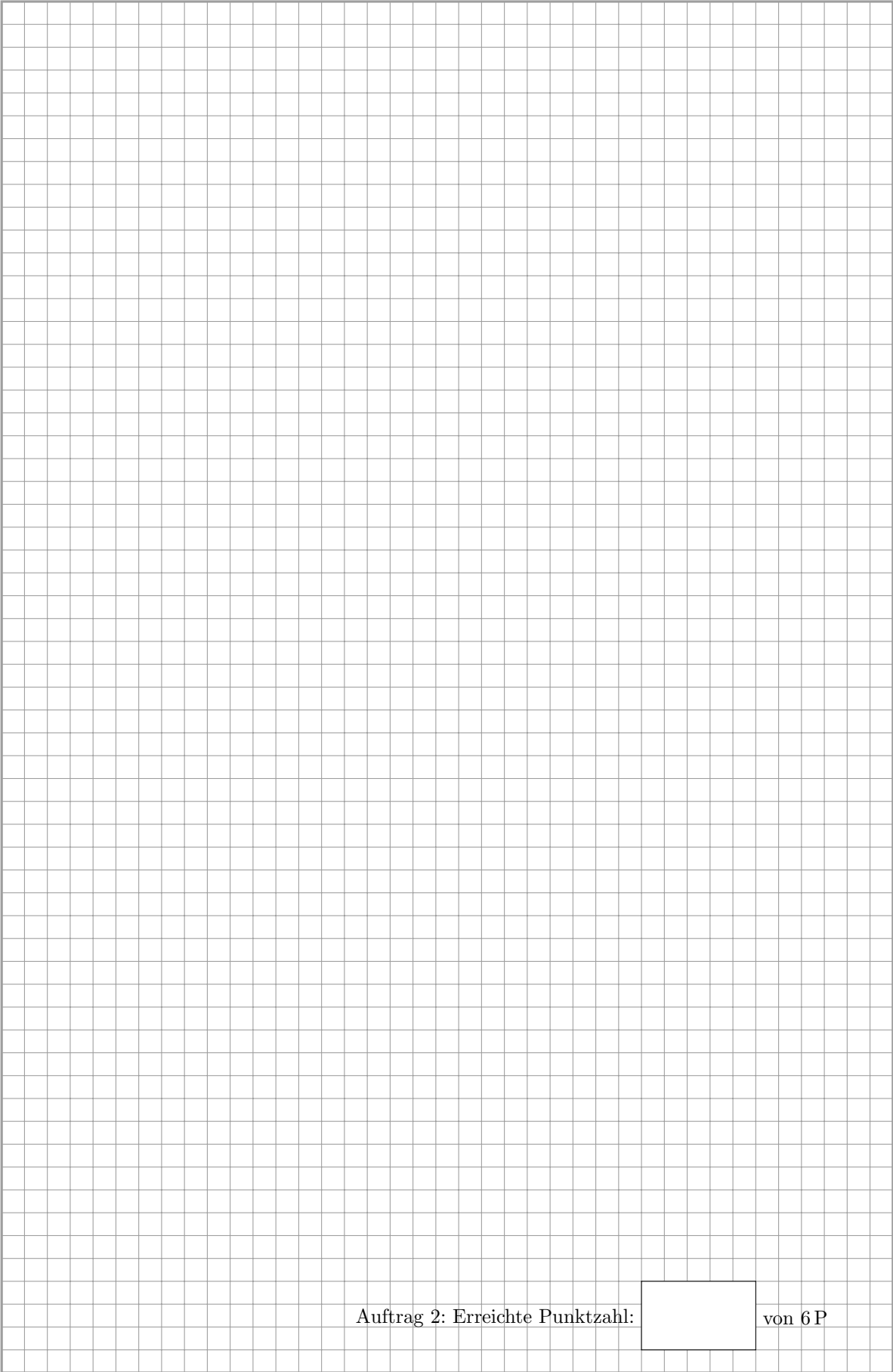
(1 P)

- (c) Samus möchte den Gegner mit ihrer Laserkanone erledigen. Da aber die direkte Sicht zum Gegner versperrt ist, muss sie auf einen bestimmten Punkt der Ebene Φ zielen, so dass der Laserstrahl dort so reflektiert wird, dass der Gegner vom reflektierten Strahl getroffen wird.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g auf der sich der reflektierte Lichtstrahl befindet.

(2.5 P)





A large grid area for writing answers, consisting of a 30x30 grid of small squares. The grid is mostly empty, with a small box at the bottom right containing the text 'Auftrag 2: Erreichte Punktzahl:' followed by a blank box and 'von 6 P'.

Auftrag 2: Erreichte Punktzahl: von 6 P

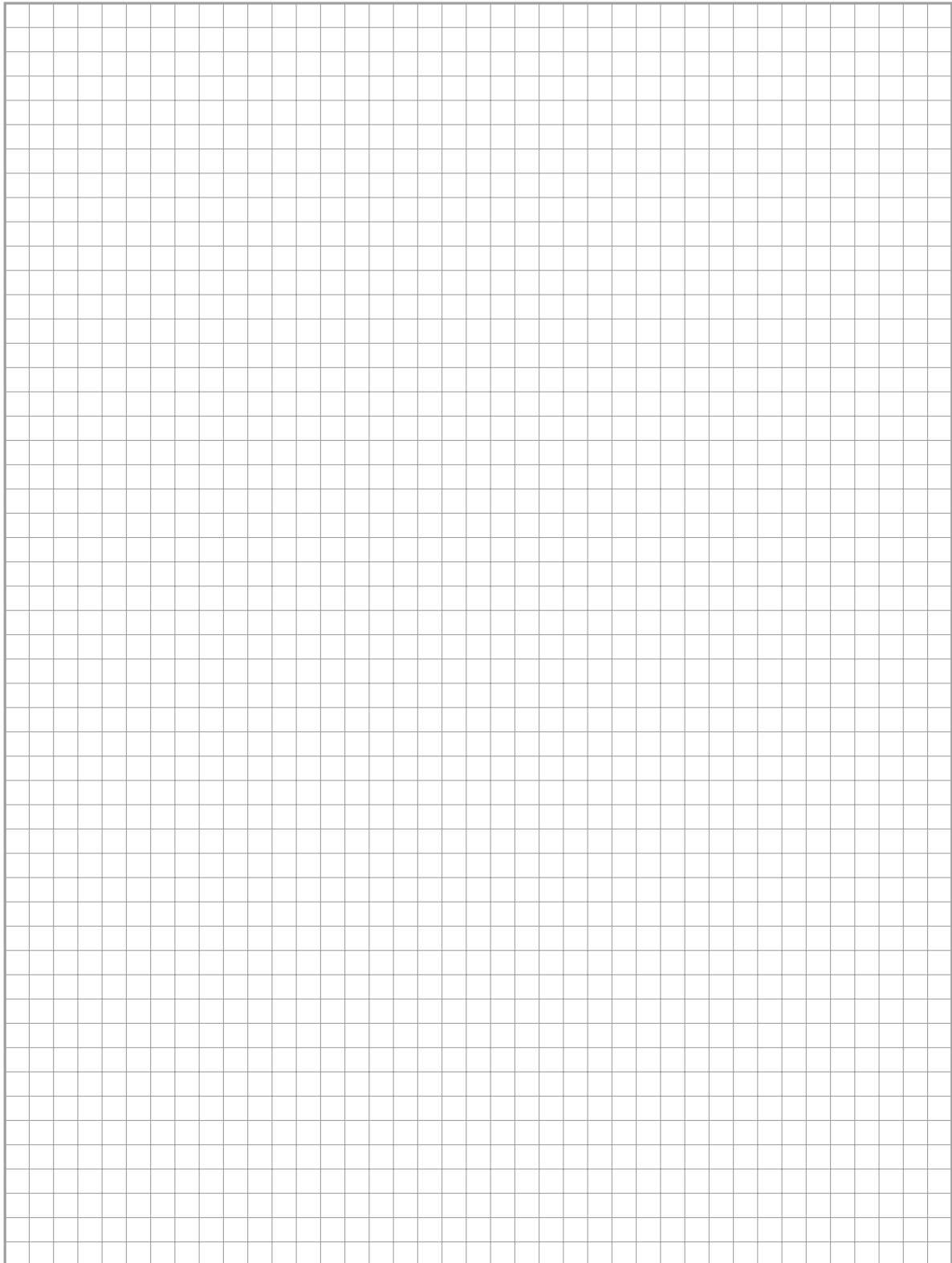
Auftrag 3 (3.5 P)

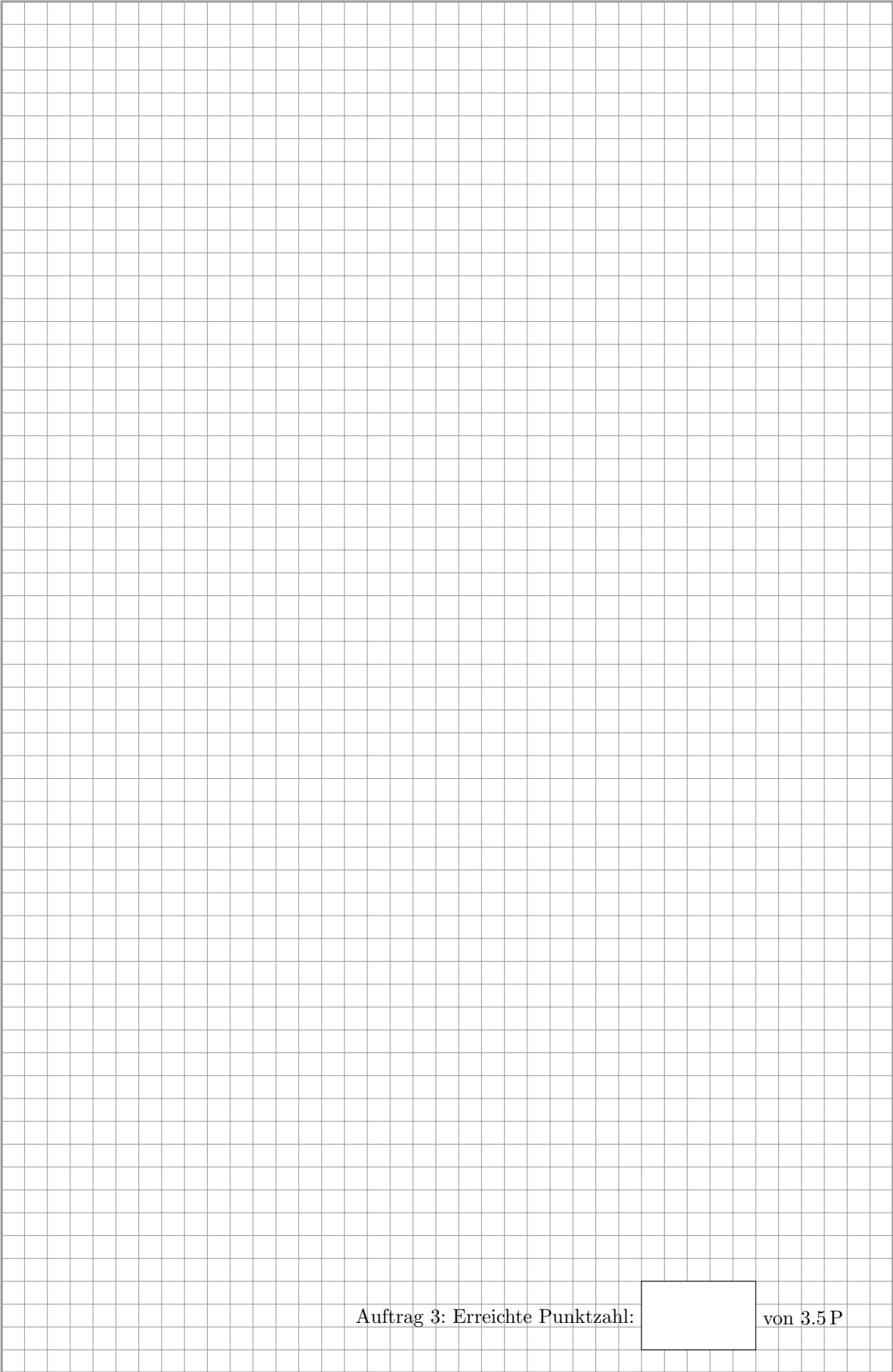
Beweisen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n die Zahl

$$12^n - 7^n$$

durch 5 teilbar ist.

(3.5 P)





A large grid area for writing answers, with a small box at the bottom right for the score.

Auftrag 3: Erreichte Punktzahl:

von 3.5 P

Auftrag 4 (8 P)

Bei den folgenden 16 Aussagen müssen Sie jeweils ankreuzen, ob sie wahr oder falsch sind.
Die Bewertung erfolgt nach folgendem Schema:

- korrekte Antwort: +0.5 P
- die ersten vier inkorrekten Antworten: 0 P
- jede weitere inkorrekte Antwort: -0.5 P
- keine Antwort: 0 P

Das Minimum der Punktesumme beträgt 0 P.

(a)

	wahr	falsch	
$\cos(2022 \cdot \pi) = -1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$2022^{\ln(1)} = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\text{Im}((2023 + i \cdot 2022)^4) > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)

(b) Gegeben sei der Rhombus $ABCD$ von Abbildung 2.

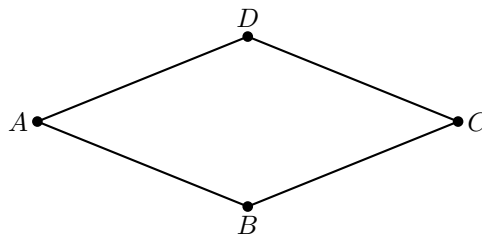


Abbildung 2: Rhombus

	wahr	falsch	
$\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\vec{AB} \cdot \vec{BC} > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)

(c) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 3)^2 \cdot (x - 1).$$

	wahr	falsch	
$f'(1) = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Der Graph von f hat einen Wendepunkt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$f''(-3) < 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Es gilt $f(-4) \cdot f'(-4) < 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)

(d) Wir betrachten für die folgenden Aussagen die Ellipse

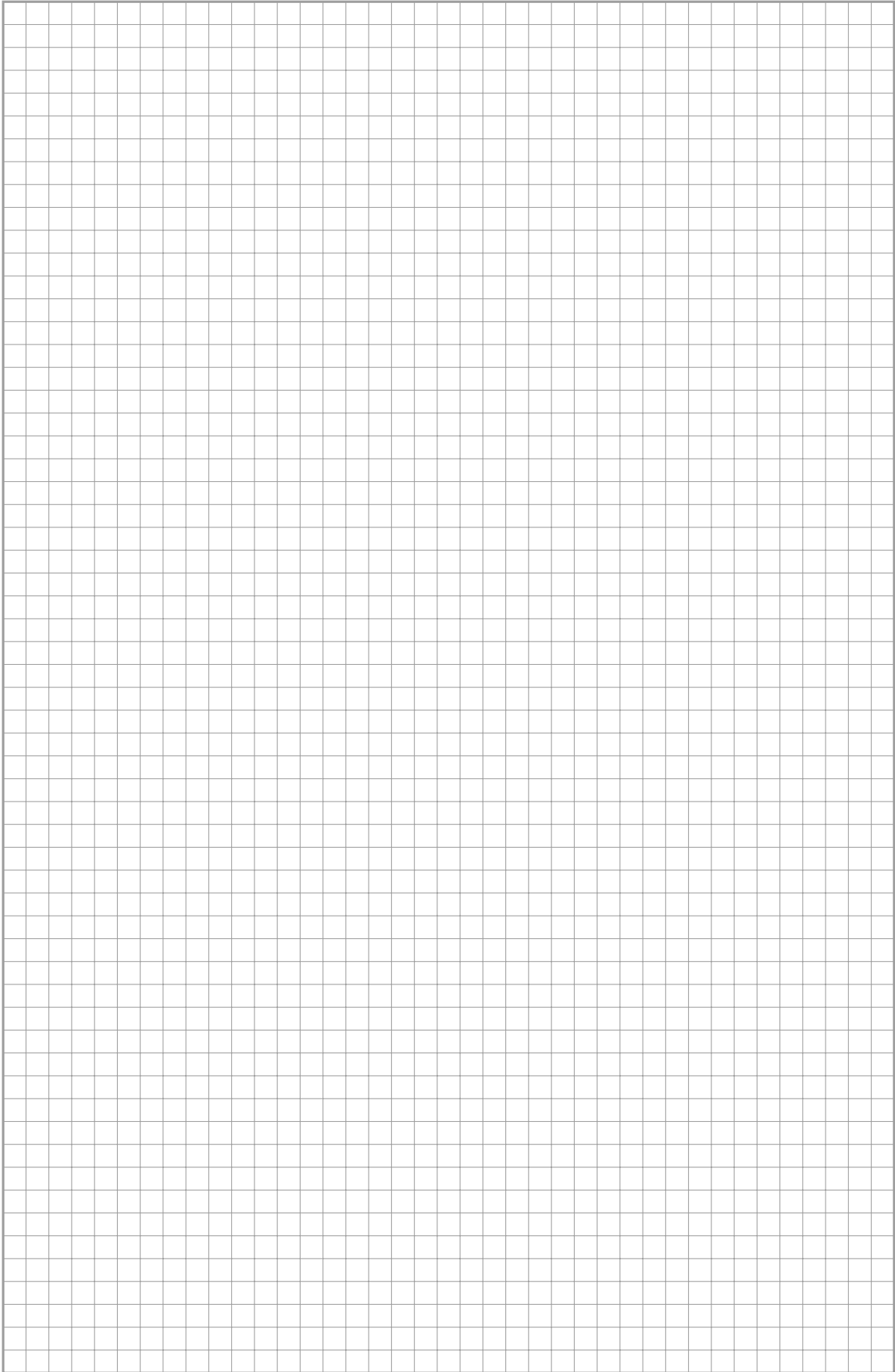
$$E : \frac{(x - 2)^2}{2021} + \frac{(y - 3)^2}{2022} = 1.$$

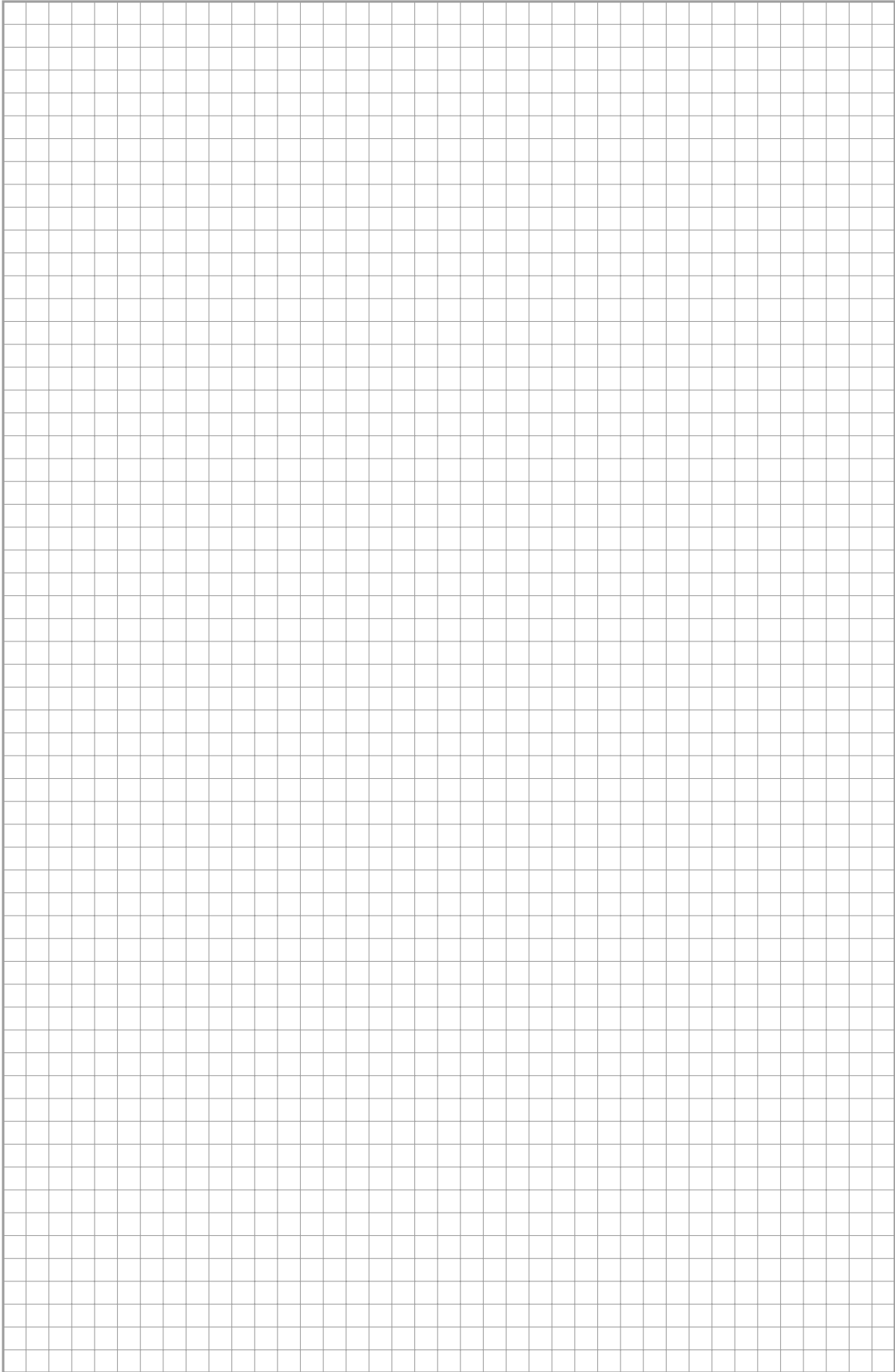
	wahr	falsch	
Der Mittelpunkt der Ellipse ist bei $(-2, -3)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Die vertikale Halbachse der Ellipse ist grösser als die horizontale.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)

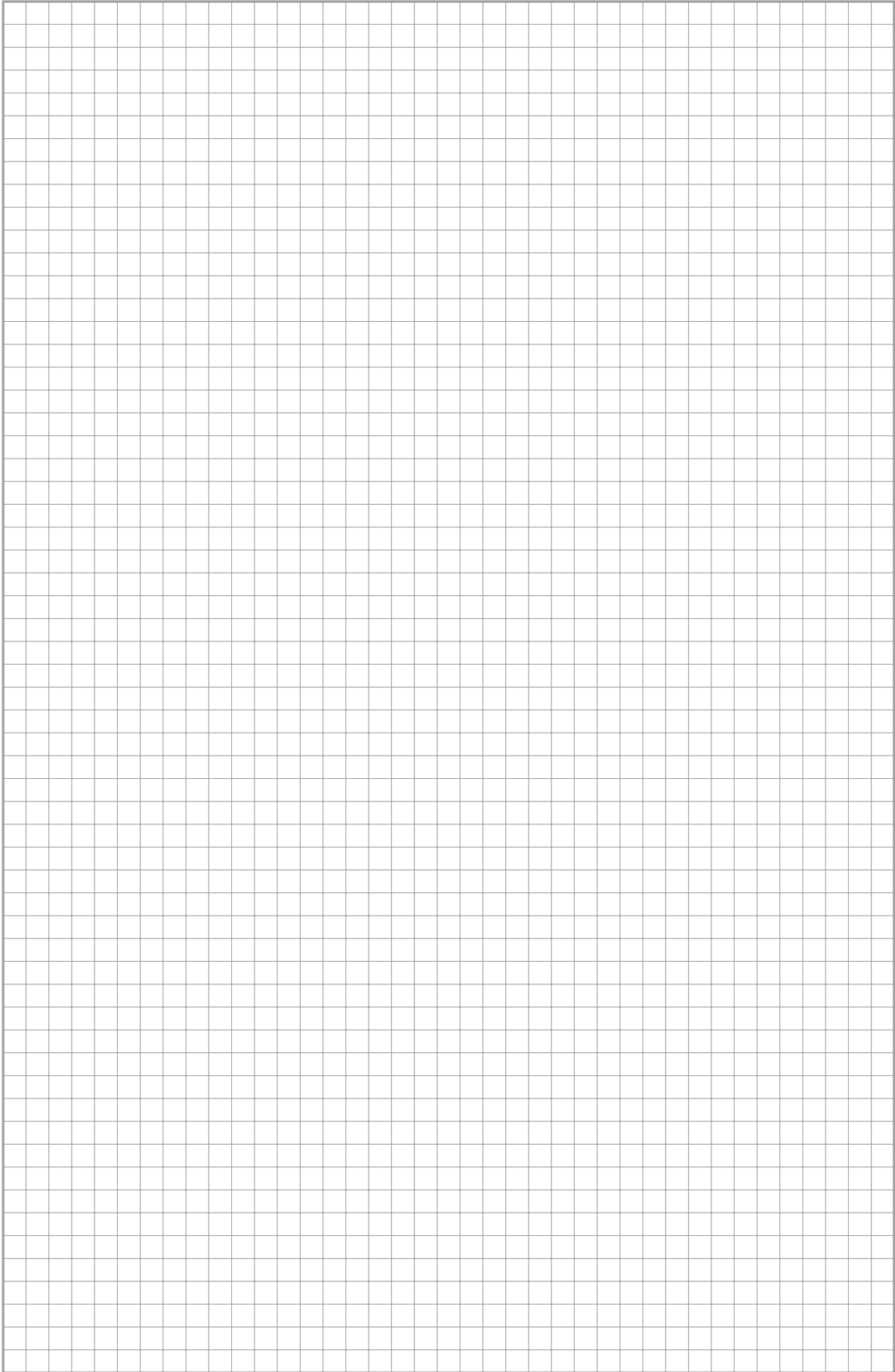
(e) Für die nachfolgenden Aussagen sei $X \sim \mathcal{N}(2022, 1)$.

	wahr	falsch	
$P(X \geq 2022) = P(X > 2022)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$P(X \leq 2022) = 0.5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$P(X > 2023) > 0.25$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)

Auftrag 4: Erreichte Punktzahl: <input style="width: 80px; height: 20px;" type="text"/> von 8 P







Name, Vorname:	Klasse:
----------------	---------

Teil 2: Mit Rechner



Abbildung 3: Taschenrechner erlaubt⁴

Für die Aufträge 5 bis 8 sind als Hilfsmittel der Taschenrechner und die Formelsammlung zugelassen. Sie erhalten Ihren Taschenrechner nach der Abgabe von Teil 1.

⁴Wikimedia Commons. *TI-nspire CX CAS calculator*. Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TI-nspire_CX_CAS.jpg (besucht am 12.11.2021)

Auftrag 5 (3.5 P)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 - 2 \cdot x^3.$$

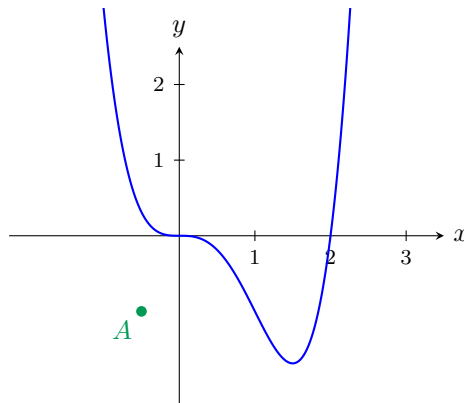
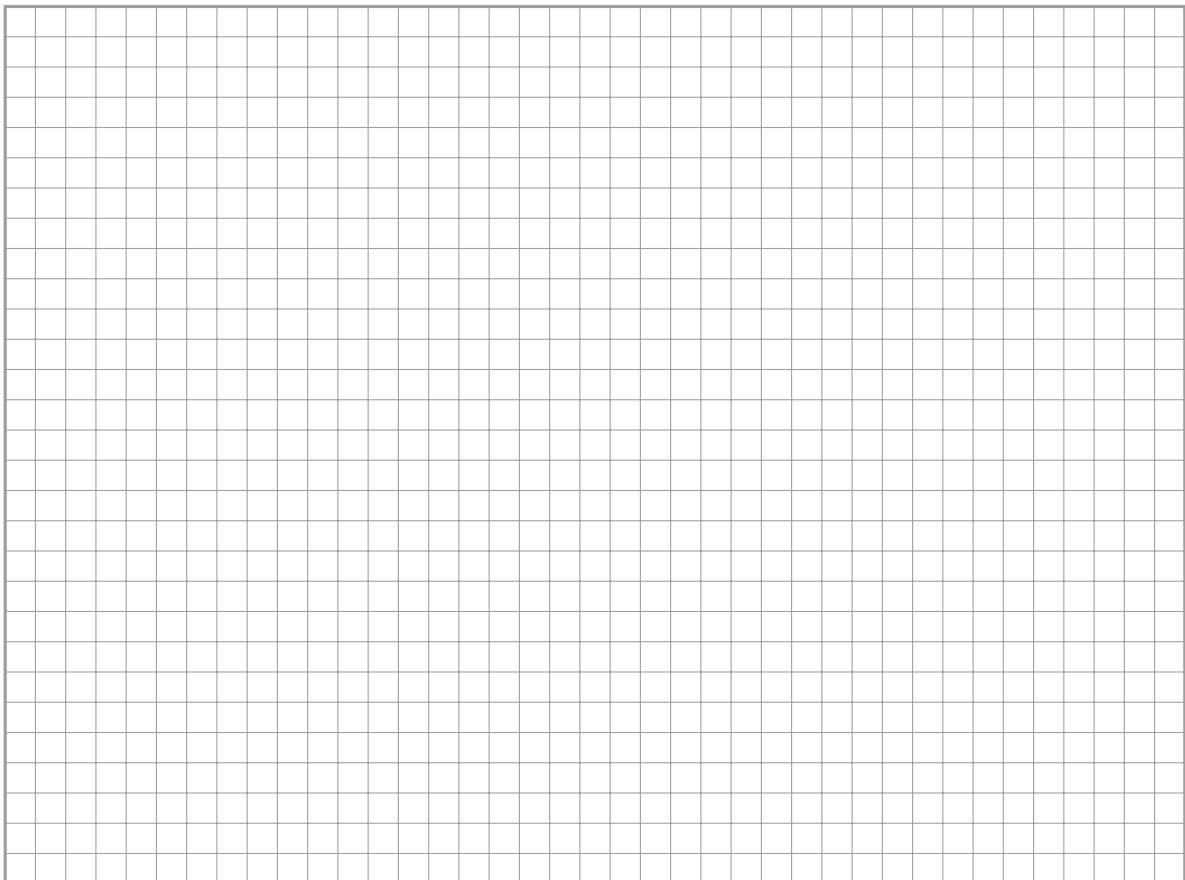
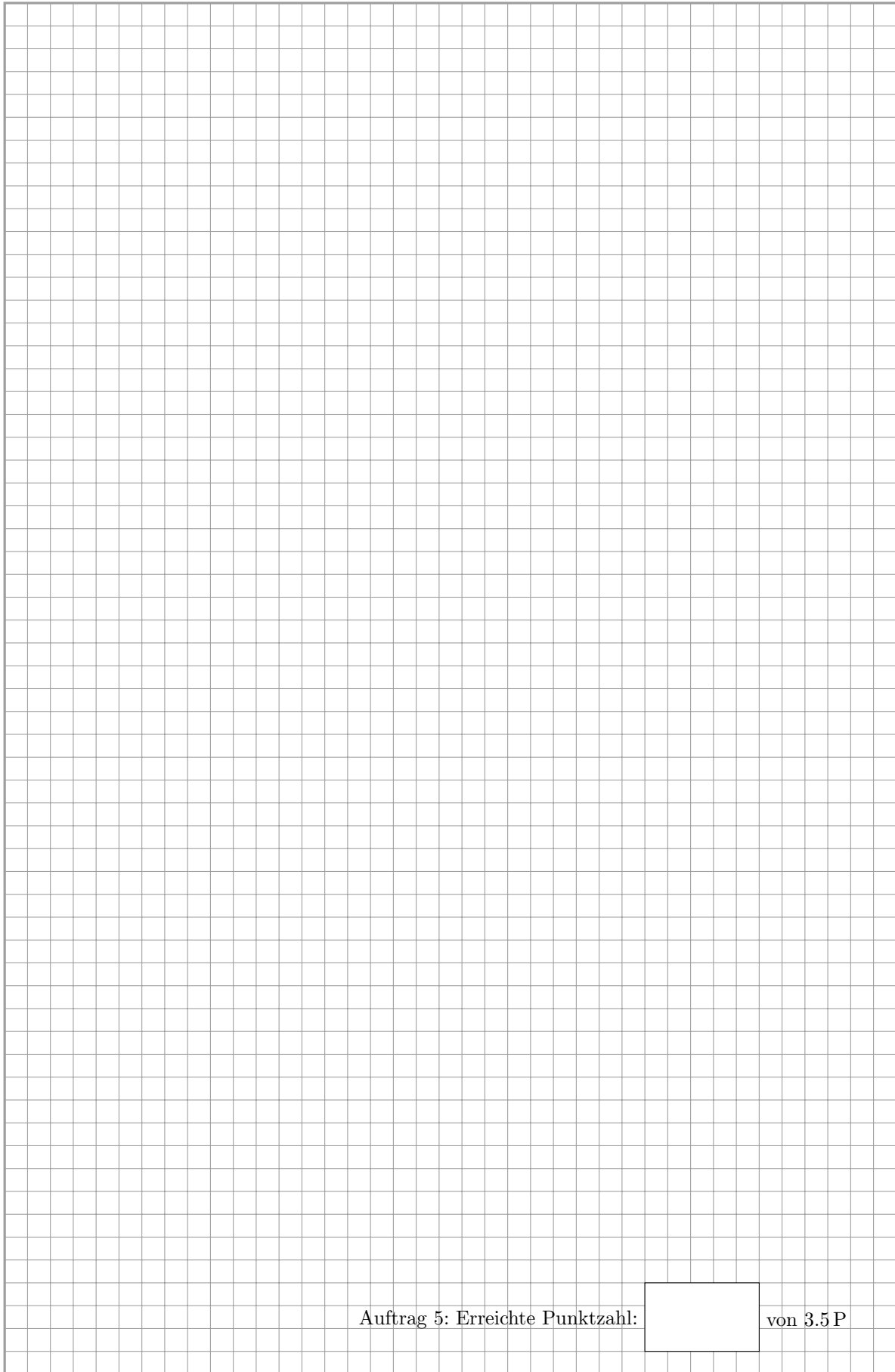


Abbildung 4: Skizze zu Auftrag 5

- (a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangenten an den Graphen von f , welche diesen bei $x = 1$ berührt. (1 P)
- (b) Wir legen nun durch den Punkt $A = (-0.5, -1)$ weitere Tangenten an den Graphen von f . Berechnen Sie die Koordinaten aller entsprechenden Berührungspunkte. (2.5 P)





A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 5: Erreichte Punktzahl:

von 3.5 P

Auftrag 6 (8 P)

Der böse Bernd und der ahnungslose Alfred essen oft gemeinsam zu Mittag. Sie werfen jeweils eine Münze, um zu bestimmen, wer das Essen zahlen soll. Bei Kopf zahlt Alfred, bei Zahl Bernd.

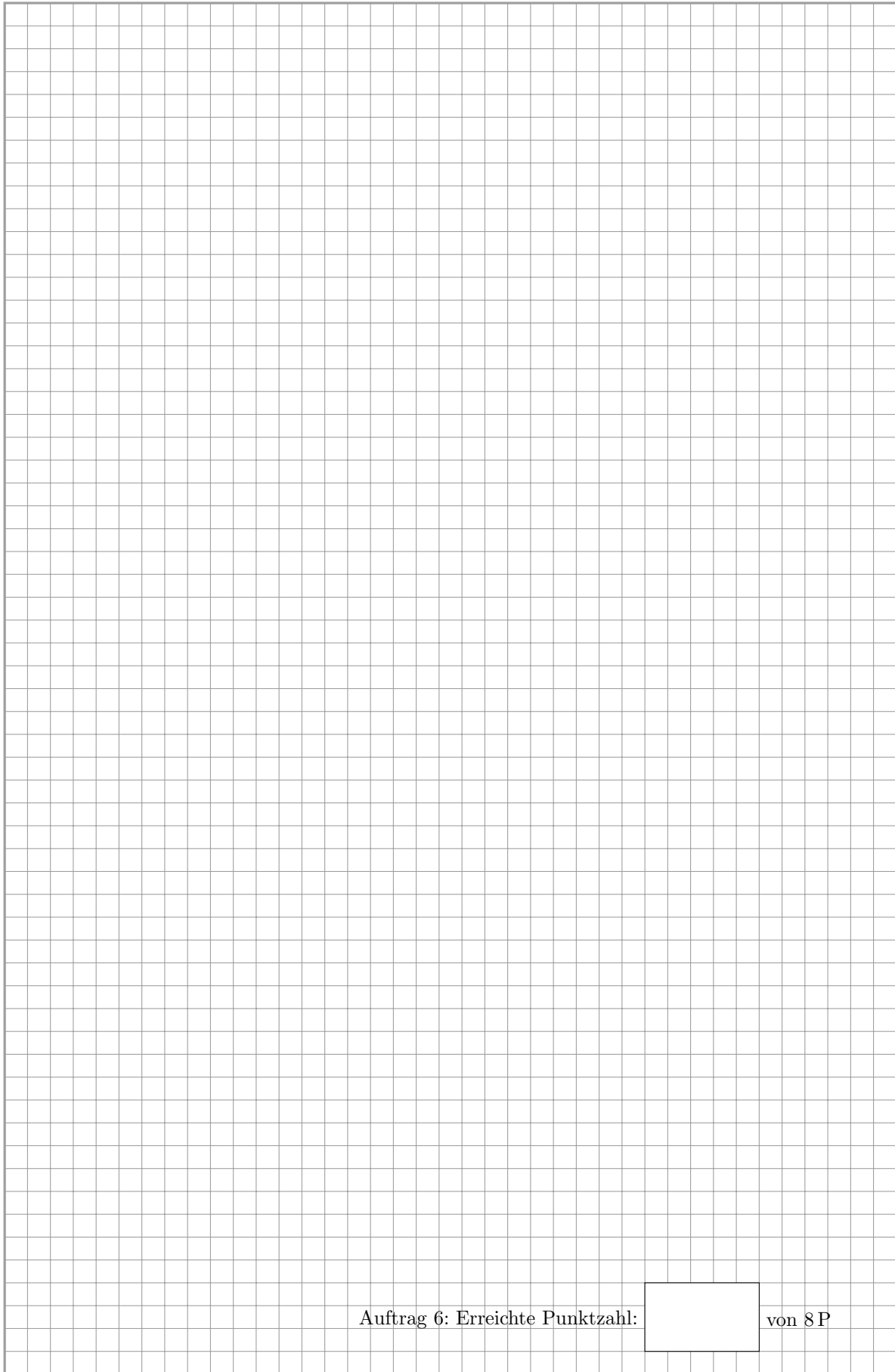
Bernd möchte nun Alfred ausnützen und besorgt sich eine gezinkte Münze, bei der die Wahrscheinlichkeit für Kopf 60% ist.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss Alfred genau 6 der nächsten 10 Mittagessen zahlen? (0.5 P)
- (b) Alfred bemerkt, dass er in letzter Zeit eher öfter das Mittagessen zahlen muss. Nach 50 Mittagessen, hat er gezählt, dass er 30 mal bezahlen musste. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies (30 mal oder mehr bei 50 Würfeln) mit einer fairen Münze passiert? (1 P)
- (c) Alfred führt Buch über seine Beobachtung. Wie viele von 100 Mittagessen müsste er bezahlen, damit er stark vermuten kann, dass die Münze gefälscht ist (d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um eine faire Münze handelt fällt unter 5%)? (1.5 P)
- (d) Alfred konfrontiert Bernd mit seinem Verdacht und schlägt folgendes vor: Sie werfen die Münze zweimal; falls «KZ» auftaucht, zahlt Bernd, falls «ZK» auftaucht zahlt Alfred und falls «KK» oder «ZZ» auftaucht, beginnt das ganze von Vorne bis einer gewinnt.
Zeigen Sie, dass dieses Vorgehen fair ist, unabhängig davon wie gross die Wahrscheinlichkeit für Kopf oder Zahl ist. (1 P)

Inspiriert von seinen Abenteuern mit Bernd, überlegt sich Alfred, welche Aussagen man über allgemeine Muster von Kopf und Zahl machen kann. Nachfolgend sind zwei Fragen, die er sich gestellt hat.

- (e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Muster «ZKZ» in den ersten fünf Würfeln einer fairen Münze vorkommt? (2 P)
- (f) Wenn man eine faire Münze fünf Mal wirft, entsteht ein Muster der Länge 5. In wie vielen von diesen Mustern kommt kein Buchstabe drei mal direkt hinter einander vor. (Zum Beispiel sind «KZKZK» oder «ZKKZZ» zulässig, aber «KZZZK» nicht) (2 P)





Auftrag 6: Erreichte Punktzahl:

von 8 P

Auftrag 7 (7 P)

Die Ellipse E hat die Brennpunkte $F_1 = (-2, 0)$ und $F_2 = (8, 0)$ und geht durch $A = (6, 4)$. Eine Parabel P hat den Brennpunkt F_2 und hat als Leitgerade die y -Achse.

(a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ellipse.

(2 P)

(b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Parabel.

(2.5 P)

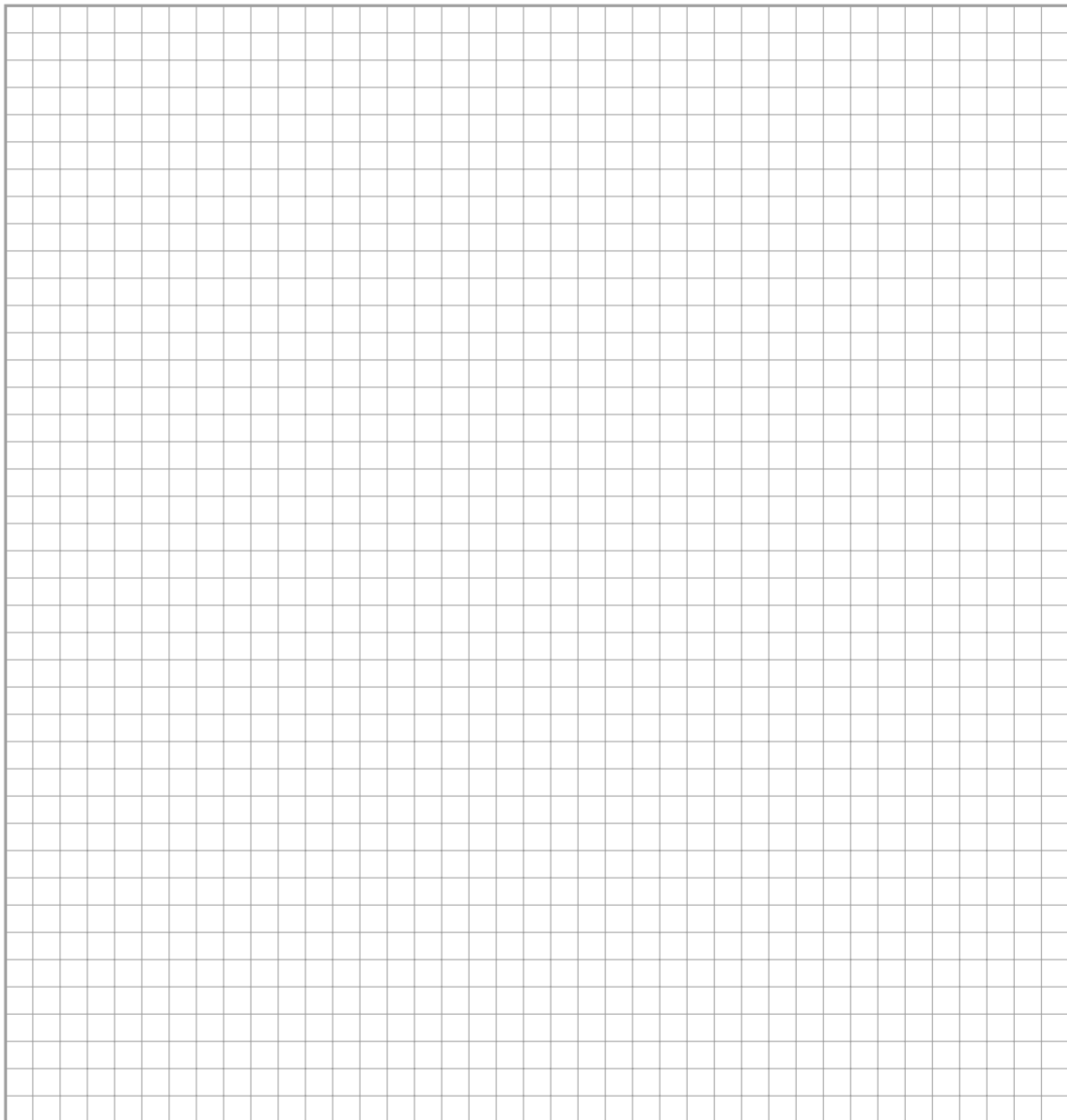
Hinweis: Falls Sie (a) oder (b) nicht lösen können, rechnen Sie mit den Gleichungen

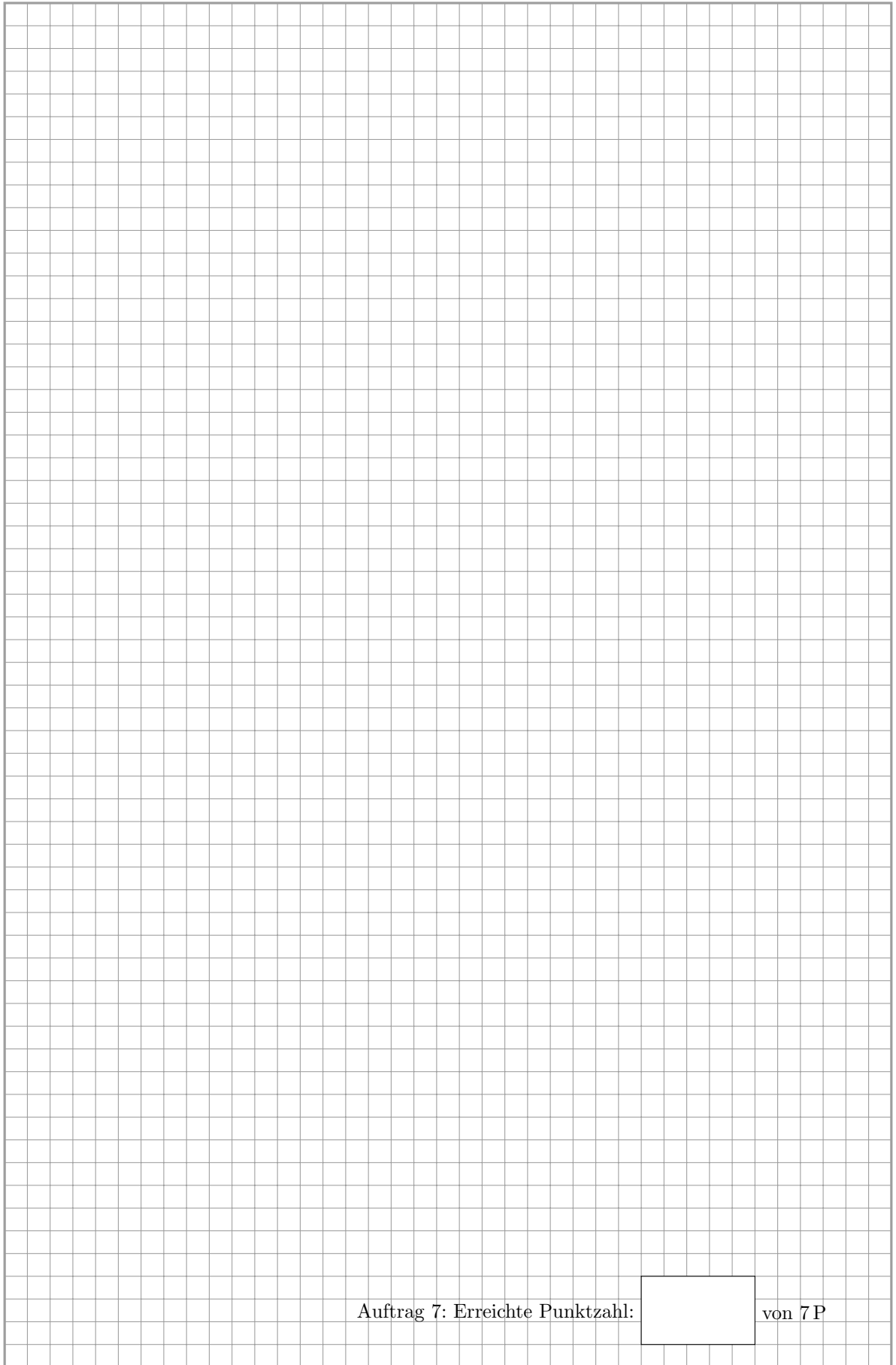
$$E : \frac{(x-4)^2}{50} + \frac{y^2}{29} = 1 \text{ und } P : y^2 = 7 \cdot (x-5)$$

weiter.

(c) Die beiden Kurven haben im ersten Quadranten einen Schnittpunkt. Welchen Schnittwinkel haben sie dort?

(2.5 P)





Auftrag 7: Erreichte Punktzahl:

von 7 P

Auftrag 8 (6.5 P)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 1 - x^2.$$

Nun wird die x -Achse im Uhrzeigersinn um den Winkel α um den Ursprung gedreht, bis die rotierte Gerade den Graphen von f zum ersten Mal rechtwinklig schneidet. Wir bezeichnen die rotierte Gerade mit g .

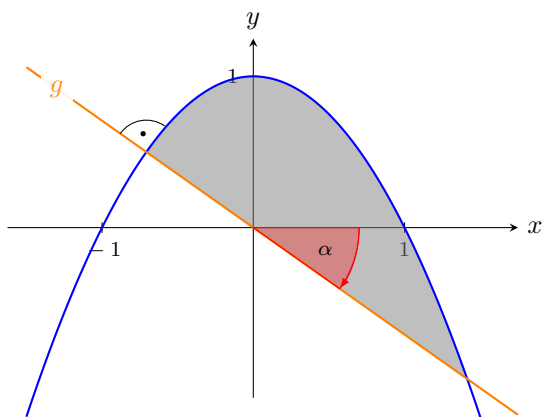


Abbildung 5: Skizze zu Auftrag 8(a) und (b)

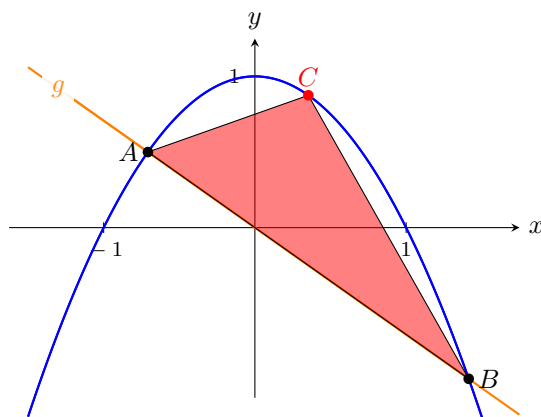


Abbildung 6: Skizze zu Auftrag 8(c)

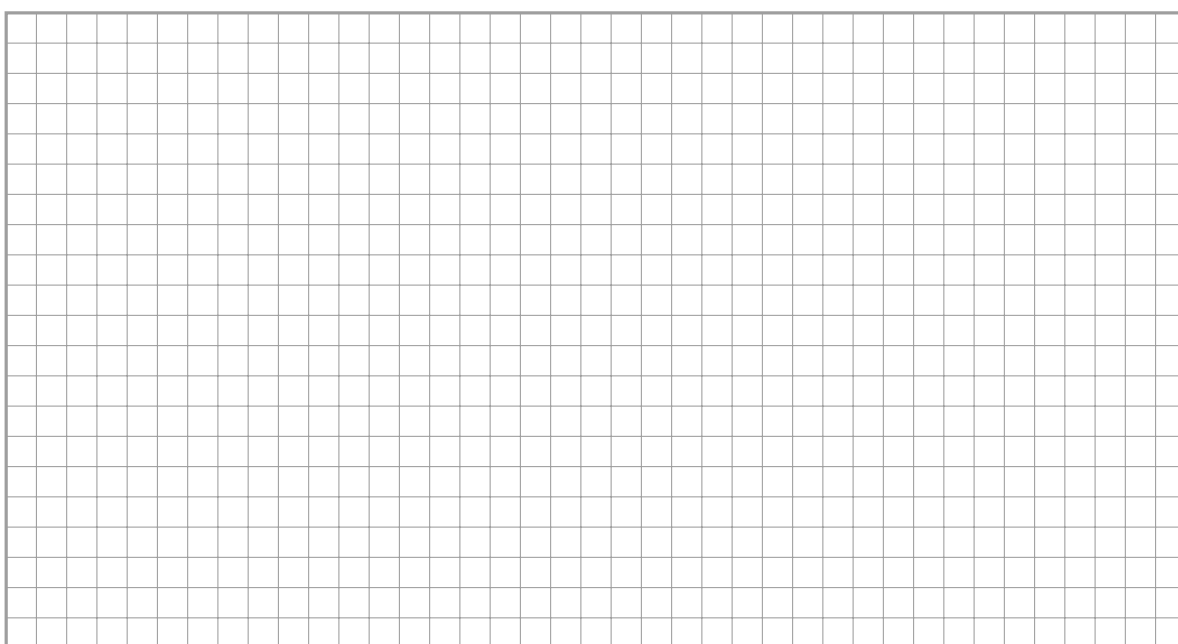
- (a) Berechnen Sie den Winkel α . (2.5 P)

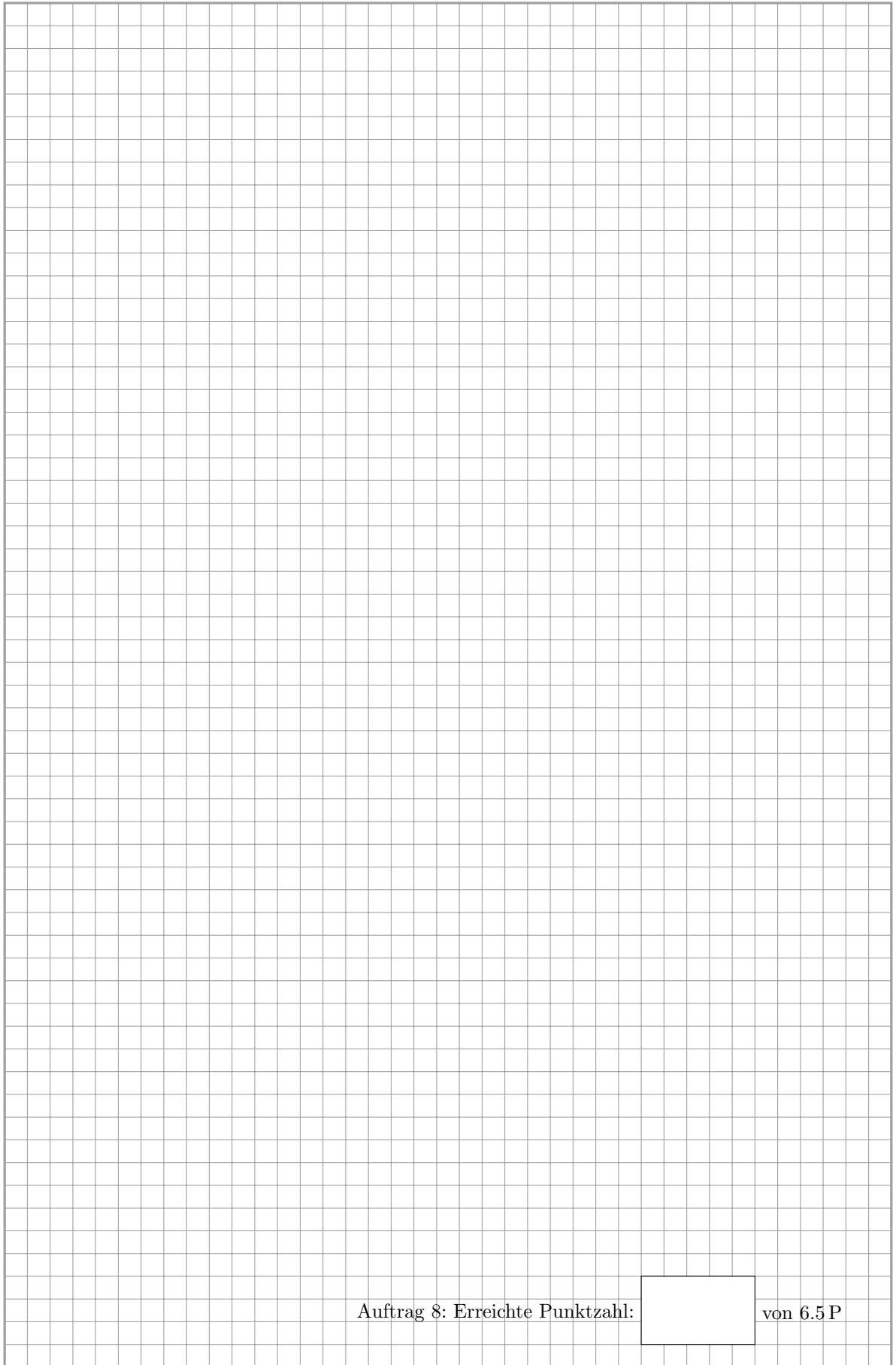
Hinweis: Falls Sie Teil (a) nicht lösen können, rechnen Sie mit $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ weiter.

- (b) Berechnen Sie den Inhalt der in Abbildung 5 grau hinterlegten Fläche. (1.5 P)
- (c) Wir bezeichnen die Schnittpunkte des Graphen von f und g mit A und B .

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $C = (x_C, y_C)$ mit $x_A < x_C < x_B$ auf dem Graphen von f , so dass das Dreieck $\triangle ABC$ maximalen Flächeninhalt hat. Der Nachweis ist nicht zu erbringen.

(2.5 P)





A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 8: Erreichte Punktzahl:

von 6.5 P

