

SCHRIFTLICHE MATURPRÜFUNG IN MATHEMATIK



Name, Vorname:	Klasse:
-----------------------	----------------

Es gelten die folgenden Bestimmungen:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Der Lösungsweg zu allen Aufgaben muss klar und vollständig sein. Der Einsatz des Taschenrechners (TI-*n*spire CX CAS) ist klar anzugeben. Zu Beginn der Prüfung muss der Speicher des Taschenrechners vollständig gelöscht sein.
- Die Prüfung besteht aus zwei Teilen:
 - Teil 1: Die Aufgaben 1 bis 3 sind ohne Taschenrechner zu lösen. Als einziges Hilfsmittel ist in diesem Teil die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen.
Wenn Sie diesen Teil erledigt haben, legen Sie alle dazugehörigen Blätter (inklusive Aufgaben) in den vorhandenen Umschlag, kleben Sie diesen zu und geben ihn der Aufsichtsperson ab (Achtung: Nur diejenigen Blätter, die sich im zugeklebten Umschlag befinden, werden für die Bewertung des 1. Teils beachtet).
 - Teil 2: Nach Abgabe von Teil 1 erhalten Sie Ihren Taschenrechner, um damit und mit der Formelsammlung die Aufgaben 4 bis 6 zu lösen.
- Die Schlussnote berechnet sich wie folgt:

$$\text{Note} = \frac{5 \cdot \text{«erreichte Anzahl Punkte»}}{50} + 1 \text{ (gerundet auf halbe Noten)} =$$

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Klasse

Examinator/-in

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Total
mögliche Punkte	10	5	9	4.5	8	9.5	9	55
erreichte Punkte								

Name, Vorname:

Klasse:

Teil 1: Ohne Rechner



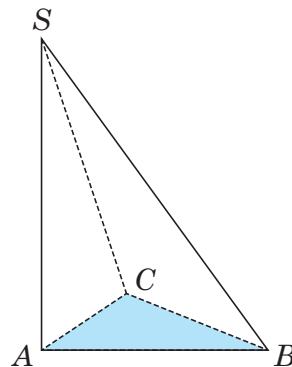
Abbildung 1: Taschenrechner nicht erlaubt¹

Die Aufgaben 1 bis 3 sind ohne Taschenrechner zu lösen. Als einziges Hilfsmittel ist in diesem Teil die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen.

¹Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/TI-Nspire> (cc) (12.1.2019), bearbeitet

AUFGABE 1 (10 P)

Gegeben sind die Punkte $A(-3|1|-4)$, $B(3|3|1)$ und $C(9|7|4)$. Das Dreieck ABC bildet die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide, deren Spitze S senkrecht zur Dreiecksfläche über dem Punkt A liegt.



- (a) Ermitteln Sie die Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A , B und C . (3 P)

Hinweis: Falls Sie (a) nicht lösen konnten, arbeiten Sie weiter mit der Koordinatengleichung $E: 7x - 6y - 6z + 3 = 0$.

- (b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(10|-8|0)$ von der Ebene E . (1.5 P)
- (c) Der Punkt $P(10|-8|0)$ wird an der Ebene E gespiegelt. Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes P' . (2.5 P)
- (d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC . (1 P)
- (e) Berechnen Sie die Koordinaten einer der möglichen Spitzen S , falls das Volumen der Pyramide 121 beträgt. (2 P)

AUFGABE 2 (5 P)

Vier Mädchen (A, B, C, D) und vier Jungen (W, X, Y, Z) sitzen nebeneinander in einer Reihe. In dieser Reihe gibt es zehn Sitzplätze. Zwei Sitze bleiben also leer.



Bei den folgenden Aufgaben müssen Ausdrücke mit Fakultäten und Binomialkoeffizienten nicht ausgerechnet oder gekürzt werden.

- (a) Auf wie viele Arten können die acht Personen sitzen, falls zwischen den Personen keine Sitze leer bleiben dürfen? (1 P)
- (b) Auf wie viele Arten können die acht Personen sitzen, falls es erlaubt ist, dass zwischen den Personen Sitze leer bleiben? (1 P)
- (c) Auf wie viele Arten können die acht Personen sitzen, falls die zwei Sitze an den beiden Enden leer bleiben müssen und A und W unbedingt nebeneinander sitzen wollen? (1.5 P)
- (d) Auf wie viele Arten können die acht Personen sitzen, falls die zwei Sitze an den beiden Enden leer bleiben müssen und nie zwei Mädchen oder zwei Jungen nebeneinander sitzen sollen? (1.5 P)

AUFGABE 3 (9P)

Bei den folgenden 18 Aussagen müssen Sie jeweils ankreuzen, ob sie wahr oder falsch sind.
Die Bewertung erfolgt nach folgendem Schema:

- korrekte Antwort: +0.5 P
- die ersten vier inkorrekten Antworten: 0 P
- jede weitere inkorrekte Antwort: -0.5 P
- keine Antwort: 0 P

Das Minimum der Punktesumme beträgt 0 P.

(a) Aufgaben zum Thema Funktionen, Differentialrechnung, Integralrechnung:

	wahr	falsch	
Die Polynomfunktion $f(x) = -x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)^2$ ist vom Grad 4.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Gegeben ist eine Polynomfunktion f . Wenn $f(2) \cdot f'(2) = 0$, dann hat der Graph von f ein Minimum oder ein Maximum an der Stelle $x = 2$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Die Funktionen $f(x) = x \cdot (x^2 + 1)^2$ und $g(x) = x \cdot (x - 1)^2$ haben gleich viele Nullstellen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Für $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ gilt: $-f'(x) = g''(x)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \int_3^{-3} (x^2 - 9) dx$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\int_0^{2\pi} (\sin(x) - \cos(x)) dx = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)

(b) Aufgaben zum Thema Vektorgeometrie:

	wahr	falsch	
<p>Die Richtungsvektoren der Geraden</p> $g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$ <p>sind kollinear.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
<p>Die Richtungsvektoren der Geraden</p> $g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ -10 \end{pmatrix}$ <p>stehen senkrecht aufeinander.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
<p>Wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, dann gilt: $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c}$.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
<p>Wenn drei Vektoren komplanar sind, dann sind mindestens zwei Vektoren davon auch kollinear.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
<p>Wenn man die Koordinatengleichung einer Ebene auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit dem Faktor 2 multipliziert, wird die Ebene doppelt so gross.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)

(c) Aufgaben kreuz und quer:

	wahr	falsch	
$\binom{20}{10} = \frac{20!}{10!}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$3^{2020} + 3^{2020} + 3^{2020} + 3^{2020} < 3^{2021}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$2021^{\ln(1)} = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\sin(20^\circ) > \cos(20^\circ)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Seien a_n und b_n arithmetische Folgen, so ist $c_n = a_n + b_n$ ebenfalls eine arithmetische Folge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Für eine binomialverteilte Zufallsgrösse X mit $n = 10$ und $p = 0.4$ gilt, dass $P(X = k)$ maximal ist für $k = 4$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Für eine binomialverteilte Zufallsgrösse X mit $n = 10$ und $p = 0.4$ gilt, dass $P(X \leq 2) = P(X \geq 8)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)

Name, Vorname:

Klasse:

Teil 2: Mit Rechner



Abbildung 2: Taschenrechner erlaubt²

Für die Aufgaben 4 bis 7 sind als Hilfsmittel der Taschenrechner (TI-nspire CX CAS) und die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen. Sie erhalten Ihren Taschenrechner nach der Abgabe von Teil 1.

²Quellen: <https://de.wikipedia.org/wiki/TI-Nspire> (cc) (12.1.2019) und <https://openclipart.org/detail/200606/primary-ok> (cc) (12.1.2019), bearbeitet

AUFGABE 4 (4.5 P)

Über einer 8 cm langen Strecke wird ein Halbkreis gezeichnet und rot eingefärbt (Schritt 1).

Nun wird die Strecke halbiert und über jeder Teilstrecke jeweils ein Halbkreis gezeichnet. Diese beiden Halbkreise werden gelb eingefärbt (Schritt 2).

Die beiden Teilstrecken werden nun wiederum halbiert und über jeder Teilstrecke wird ein Halbkreis gezeichnet und rot eingefärbt (Schritt 3).

Dieses Verfahren wird unendlich oft fortgesetzt. Die Halbkreise werden abwechselnd rot und gelb eingefärbt. In untenstehender Figur sehen Sie das Resultat nach 6 Schritten.



- (a) Berechnen Sie die Gesamtlänge aller Halbkreisbögen nach 6 Schritten. (2 P)
- (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des rot sichtbaren Gebietes, wenn das Verfahren unendlich oft fortgesetzt wird. (2.5 P)

AUFGABE 5 (8 P)

Gegeben sind die Funktionen

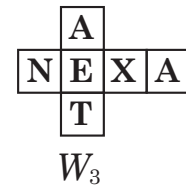
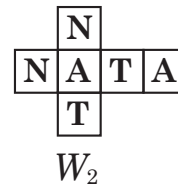
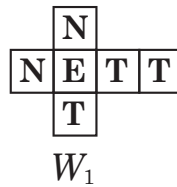
$$f(x) = 2 - x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = (x - a)^2.$$

Dabei ist $-1.3 \leq a \leq 1.3$. Wir betrachten nun die **im 1. Quadranten** liegende Fläche F , die von den beiden Funktionsgraphen und der y -Achse eingeschlossen wird.

- (a) Setzen Sie $a = -0.3$ ein, erstellen Sie eine Skizze der Situation und berechnen Sie den Inhalt der beschriebenen Fläche F . Achten Sie dabei auf das Vorzeichen von a . (2.5 P)
- (b) Erläutern Sie, was der Parameter a für die Parabel g bewirkt. (1 P)
- (c) Wenn a grösser wird, wird der bei Teilaufgabe (a) berechnete Flächeninhalt zuerst grösser und dann nimmt er wieder ab. Bestimmen Sie eine allgemeine Funktionsgleichung $F(a)$ für diesen Flächeninhalt, mit a als Variable dieser Funktion. (3 P)
- (d) Für welchen Wert von a ist $F(a)$ maximal? (Der Nachweis des Maximums ist nicht verlangt.) (1.5 P)

AUFGABE 6 (9.5 P)

Sie haben drei Würfel (W_1 , W_2 und W_3), mit einer Auswahl der Konsonanten **N**, **T** und **X** und der Vokalen **A** und **E** auf den Würfelseiten. Die folgende Abbildung zeigt die zugehörigen drei Würfelnetze.



- (a) Sie werfen W_1 viermal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Buchstaben **N**, **E**, **T**, **T** in dieser Reihenfolge werfen. (1 P)
- (b) Sie werfen W_1 viermal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Buchstaben **N**, **E**, **T**, **T** in irgend einer Reihenfolge werfen. (1 P)
- (c) Sie werfen jeden der drei Würfel einmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau zwei Konsonanten werfen. (1.5 P)
- (d) Sie werfen jeden der drei Würfel einmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie dreimal den gleichen Buchstaben werfen. (1 P)
- (e) Sie werfen W_1 zehnmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens dreimal **E** werfen. (1.5 P)
- (f) Sie werfen W_1 zehnmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau zweimal **E**, und zwar direkt hintereinander, werfen. (1.5 P)
- (g) Jan wählt einen beliebigen der drei Würfel und wirft diesen einmal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er W_1 gewählt hat, wenn man weiss, dass Jan ein **N** geworfen hat? (2 P)

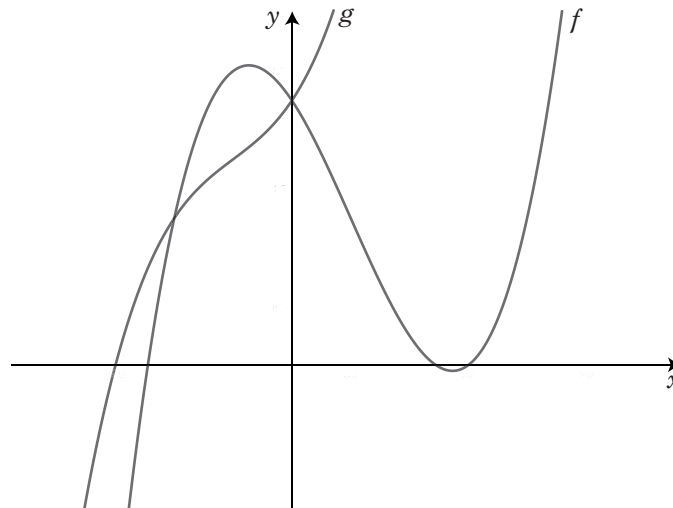
AUFGABE 7 (9P)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = (x - 3a) \cdot (x^2 - 3a) \quad \text{und} \quad g(x) = (x + 3a) \cdot (x^2 + 3a).$$

Dabei ist $a > 0$.

- (a) Setzen Sie $a = 0.5$ ein. In untenstehender Figur sind die Graphen von f und g gezeichnet. Der Graph der Funktion g hat einen Wendepunkt. Die Tangente in diesem Wendepunkt schneidet den Graphen der Funktion f in drei Punkten. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte. (4P)



- (b) In untenstehender Figur sind die Graphen von f und g noch einmal gezeichnet (wieder für $a = 0.5$). In der Figur ist ein Rechteck $ABCD$ gezeichnet. Der Punkt B liegt auf dem Wendepunkt des Graphen der Funktion f und der Punkt D liegt auf dem Wendepunkt des Graphen der Funktion g . Die Punkte A und C liegen so, dass die Kanten des Rechtecks parallel zu den Koordinatenachsen sind. Berechnen Sie für welchen Wert von a das Rechteck $ABCD$ ein Quadrat ist. (5P)

