Schriftliche Maturprüfung in Mathematik

Name, Vorname:	**Klasse:**

Es gelten die folgenden Bestimmungen:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Der Lösungsweg zu allen Aufgaben, mit Ausnahme von Aufgaben 1. d) und e) sowie Aufgabe 2, muss klar und vollständig sein. Der Einsatz des Taschenrechners (TI-*n*spire CX CAS) ist klar anzugeben. Zu Beginn der Prüfung muss der Speicher des Taschenrechners vollständig gelöscht sein.
- Die Prüfung besteht aus zwei Teilen:
  - Teil 1: Die Aufgaben 1 bis 2 sind ohne Taschenrechner zu lösen. Als einziges Hilfsmittel ist in diesem Teil die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen.

    Wenn Sie diesen Teil erledigt haben, legen Sie alle dazugehörigen Blätter (inklusive Aufgaben) in den vorhandenen Umschlag, kleben Sie diesen zu und geben ihn der Aufsichtsperson ab. Achtung: Nur diejenigen Blätter, die sich im zugeklebten Umschlag befinden, werden für die Bewertung des 1. Teils beachtet.
  - Teil 2: Nach Abgabe von Teil 1 erhalten Sie ihren Taschenrechner, um damit und mit der Formelsammlung die Aufgaben 3 bis 6 zu lösen.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Klasse **Examinator/-in**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Total**
mögliche Punkte	10	8	9	11	10	8	56
erreichte Punkte							

Name, Vorname:	**Klasse:**

Teil 1: Ohne Rechner

Abbildung 1: Taschenrechner nicht erlaubt[1]

Die Aufgaben 1 bis 2 sind ohne Taschenrechner zu lösen. Als einziges Hilfsmittel ist in diesem Teil die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen.

[1]Quelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/TI-Nspire` (cc) (12.1.2019), bearbeitet

Aufgabe 1 (10 P)

Gegeben seien die Punkte $P(5/1/2)$ und $Q(3/13/6)$.

(a) Geben Sie eine Parametergleichung der Geraden durch P und Q an und berechnen Sie, wo diese Gerade die Aufrissebene schneidet. (2 P)

(b) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E dann erhält man als Bildpunkt den Punkt Q. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E. (2 P)

(c) Berechnen Sie alle Punkte auf der y-Achse, von denen aus die Strecke $\overline{PQ}$ unter einem Winkel von $90°$ erscheint. (3 P)

(d) Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Geben Sie eine Stammfunktion von $2021 \cdot F(x)^{2020} \cdot f(x)$ an. Es wird kein Lösungweg verlangt. (1 P)

(e) Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Geben Sie eine Stammfunktion von $f(x) \cdot x + F(x) + 2021$ an. Es wird kein Lösungweg verlangt. (2 P)

Aufgabe 2 (8 P)
Bei den folgenden 16 Aussagen müssen Sie jeweils ankreuzen, ob sie wahr oder falsch sind. Es wird kein Lösungsweg verlangt.

Die Bewertung erfolgt nach folgendem Schema:

- korrekte Antwort: +0.5 P
- die ersten vier inkorrekten Antworten: 0 P
- jede weitere inkorrekte Antwort: −0.5 P
- keine Antwort: 0 P

Das Minimum der Punktesumme beträgt 0 P.

	wahr	falsch	
Wenn eine analoge Uhr 20:21 Uhr anzeigt, dann ist der Zwischenwinkel zwischen kleinem und grossem Zeiger kleiner als 120°.	☐	☐	(0.5 P)
Der kleine und der grosse Zeiger einer analogen Uhr bilden in der Zeit zwischen 20:21 Uhr und 21:20 Uhr genau dreimal einen rechten Winkel.	☐	☐	(0.5 P)
Wenn $a_1, a_2, \ldots$ eine geometrische Folge ist, dann ist auch $a_1^{2021}, a_2^{2021}, \ldots$ eine geometrische Folge.	☐	☐	(0.5 P)
Wenn für eine arithmetische Folge 2. Ordnung gilt $a_1 = a_2 = 0$, dann muss auch gelten $a_{2021} = 0$.	☐	☐	(0.5 P)
Wenn für eine arithmetische Folge 1. Ordnung gilt $a_1 + \ldots + a_{2021} = 0$, dann muss gelten: $a_{1011} = 0$.	☐	☐	(0.5 P)
Der Graph der Funktion $f(x) = 2021 \cdot (x - 2021)^2 - 2021$ verläuft auch durch den 2. Quadranten.	☐	☐	(0.5 P)
$\left(2^{(0^2)}\right)^1 = \left(2^0\right)^{(2^1)}$	☐	☐	(0.5 P)

	wahr	falsch	
$\log_{2021}(2021^{2021}) = 1$	$\square$	$\square$	(0.5 P)
Wenn für eine Funktion $f(x)$ gilt $f(2021) \cdot f'(2021) = 0$, dann kann die Funktion an der Stelle $x = 2021$ kein Extremum besitzen.	$\square$	$\square$	(0.5 P)
Wenn für eine Funktion $f(x)$ gilt $f(2021) \cdot f'(2021) > 0$, dann kann die Funktion an der Stelle $x = 2021$ kein Extremum besitzen.	$\square$	$\square$	(0.5 P)
Für die imaginäre Einheit i gilt $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{2021} = -i$.	$\square$	$\square$	(0.5 P)
$20! \cdot 21! = (20!)^2 \cdot 21$	$\square$	$\square$	(0.5 P)
$\binom{2021}{1010} = \binom{2021}{1011}$	$\square$	$\square$	(0.5 P)
Es seien $f(t) = t + i \cdot t^2$ und $g(t) = f(t) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ zwei komplexwertige Funktionen mit reellem Argument. Die Schnittpunkte der beiden Graphen in der komplexen Zahlenebene bestimmt man, indem man zuerst die Gleichung $f(t) = g(t)$ nach t auflöst.	$\square$	$\square$	(0.5 P)
$2021 \cdot \ln(x)' = \dfrac{2021}{x}$	$\square$	$\square$	(0.5 P)
$\ln(2021 \cdot x)' = \dfrac{1}{x}$	$\square$	$\square$	(0.5 P)

Name, Vorname:	**Klasse:**

Teil 2: Mit Rechner

Abbildung 2: Taschenrechner erlaubt[2]

Für die Aufgaben 3 bis 6 sind als Hilfsmittel der Taschenrechner (TI-*n*spire CX CAS) und die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen. Sie erhalten Ihren Taschenrechner nach der Abgabe von Teil 1.

[2]Quellen: `https://de.wikipedia.org/wiki/TI-Nspire` (cc) (12.1.2019) und `https://openclipart.org/detail/200606/primary-ok` (cc) (12.1.2019), bearbeitet

Aufgabe 3 (9 P)

(a) Durch den Punkt $P(23/43)$ soll eine fallende Gerade gelegt werden, sodass diese Gerade mit den Koordiantenachsen ein Dreieck minimalen Inhalts bildet. Berechnen Sie die Steigung dieser Geraden. (Nachweis des Minimums nicht verlangt.) (3 P)

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c der Funktion $f(x) = -x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ so, dass der Graph dieser Funktion im Koordinatenursprung ein Minimum aufweist und im ersten Quadranten mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt $\frac{625}{192}$ begrenzt. (3 P)

(c) Betrachten Sie den Graphen der Funktion $f(x) = a^x - 1$ im Bereich von $x = 0$ bis $x = 2$. Bestimmen Sie $a > 1$ so, dass das Volumen des Rotationskörpers, welches sich ergibt, wenn man dieses Stück des Graphen der Funktion um die x-Achse rotieren lässt, doppelt so gross ist, wie wenn man dieses Stück um die y-Achse rotieren lässt. (3 P)

Aufgabe 4 (11 P)
Gegeben sei eine unendliche Folge von Kreisen $K_1, K_2, \ldots$. Der erste Kreis K_1 hat den Mittelpunkt $M_1(0/0)$ und den Radius $r_1 = 2$. K_2 hat den Mittelpunkt $M_2(1/3)$ und den Radius $r_2 = 1.9$. Die x-Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise bilden eine arithmetische Folge (1. Ordnung). Die Radien der Kreise hingegen bilden eine geometrische Folge. Zudem befinden sich alle Mittelpunkte der Kreise auf der Geraden $f(x) = 3x$.

(a) Geben Sie die explizite Formel für den Radius r_n des n. Kreises an. (1 P)

(b) Welches ist der erste Kreis, welcher keinen anderen Kreis schneidet? (2 P)

(c) Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche der ersten beiden Kreise. (4 P)

(d) Nun werden alle Kreise, ausser K_1 neu angeordnet: Alle Mittelpunkte bleiben auf der Geraden. Der zweite Kreis wird soweit nach rechts oben verschoben, dass er den ersten Kreis genau berührt. Dann wird der dritte Kreis soweit nach rechts oben verschoben, dass er den zweiten Kreis genau berührt, etc. Berechnen Sie die x-Koordinate des 100. Kreismittelpunkts. (4 P)

Aufgabe 5 (10 P)
Auf dem Planeten Mathematicus funktionieren SMS nicht sehr gut. Es werden zwar alle Buchstaben der Nachricht übermittelt, jedoch in absolut zufälliger Reihenfolge. Es ist also, wie wenn alle Buchstaben der Nachricht in einen Sack gelegt werden und danach blind daraus gezogen werden.

(a) Jemand schreibt eine SMS mit der Nachricht AMONGUS. Wieviele Möglichkeiten gibt es für das Wort, das der Empfänger dann erhält? (0.5 P)

(b) Jemand schreibt eine SMS mit der Nachricht ABWAERTSSPIRALE. Wieviele Möglichkeiten gibt es für das Wort, das der Empfänger dann erhält? (1 P)

Auf dem Planeten Mathematicus leben nur 5 Klone. Sie kommunizieren per SMS immer nach folgendem Schema: Klon 1 schickt eine SMS an Klon 2. Klon 2 schickt die Nachricht an Klon 3 weiter. Klon 3 schickt sie an Klon 4 weiter und Klon 4 schliesslich an Klon 5.

(c) Klon 1 verschickt an Klon 2 eine SMS mit der Nachricht WAHLKURS, welche dann an Klon 3 weitergeschickt wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Klon 3 die Nachricht WAHLKURS, also genau die Nachricht, welche Klon 1 ursprünglich verschickt hat? (1 P)

(d) Klon 1 verschickt an Klon 2 eine SMS mit der Nachricht BREI, welche dann solange weiterverschickt wird, bis die Nachricht BIER auftritt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das spätestens bei Klon 4 der Fall? (2 P)

(e) Klon 1 verschickt an Klon 2 eine SMS mit der Nachricht STERN welche dann bis zu Klon 5 weiterverschickt wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dabei bis und mit Klon 5 genau zweimal die Nachricht ERNST aufgetaucht? (2 P)

(f) Klon 1 verschickt an Klon 2 eine SMS mit der Nachricht MATH. Es sei X die Zufallsgrösse, welche angibt, wieviele Buchstaben davon bei Klon 2 an der ursprünglichen Stelle stehen bleiben. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$. (3.5 P)

Aufgabe 6 (8 P)

(a) Gärtner Norz verknotet ein Seil, sodass sich eine Schlinge von Umfang 16 ergibt. Bei $P\,(0/0)$ und $Q\,(6/0)$ steckt er zwei Pföcke ein und konstruiert mit der Gärtnerkonstruktion eine Ellipse. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ellipse. (2 P)

Hinweis: Wenn Sie Aufgabe (a) nicht lösen konnten, verwenden Sie für Aufgabe (b) die Ellipsengleichung $\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y)^2}{4^2} = 1$.

(b) Unter welchem Winkel schneidet diese Ellipse die $y-$Achse im positiven Bereich? (2 P)

(c) Bestimmen Sie von folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Wertemenge W:

(i) $f(z) = \mathrm{Re}(z - \overline{z})$ (1 P)

(ii) $f(z) = \mathrm{i} \cdot \mathrm{Re}(z + 1)$ (1 P)

(d) Es sei $M = \{x + y \cdot \mathrm{i} \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{C}$.
Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Wertemenge von $f : M \to \mathbb{C}$ für $f(z) = (1 + \mathrm{i}) \cdot \overline{z}$ (2 P)