

SCHRIFTLICHE MATURPRÜFUNG IN MATHEMATIK



Name, Vorname:	Klasse:
-----------------------	----------------

Es gelten die folgenden Bestimmungen:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Der Lösungsweg zu allen Aufträgen muss klar und vollständig sein. Der Einsatz des Taschenrechners (TI-nspire CX CAS) ist klar anzugeben. Zu Beginn der Prüfung muss der Speicher des Taschenrechners vollständig gelöscht sein.
- Die Prüfung besteht aus zwei Teilen:
 - Teil 1: Die Aufträge 1 bis 4 sind ohne Taschenrechner zu lösen. Als einziges Hilfsmittel ist in diesem Teil die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen.
Wenn Sie diesen Teil erledigt haben, legen Sie alle dazugehörigen Blätter (inklusive Aufträge) in den vorhandenen Umschlag, kleben Sie diesen zu und geben ihn der Aufsichtsperson ab (Achtung: Nur diejenigen Blätter, die sich im zugeklebten Umschlag befinden, werden für die Bewertung des 1. Teils beachtet).
 - Teil 2: Nach Abgabe von Teil 1 erhalten Sie ihren Taschenrechner, um damit und mit der Formelsammlung die Aufträge 5 bis 10 zu lösen.
- Die Schlussnote berechnet sich wie folgt:

$$\text{Note} = \frac{5 \cdot \text{«erreichte Anzahl Punkte»}}{46} + 1 \text{ (gerundet auf halbe Noten)} =$$

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Klasse

Examinator/-in

Auftrag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
mögliche Punkte	10	8	3.5	3	5.5	5	3	2.5	6	7	53.5
erreichte Punkte											

Name, Vorname:

Klasse:

Teil 1: Ohne Rechner



Abbildung 1: Taschenrechner nicht erlaubt¹

Die Aufträge 1 bis 4 sind ohne Taschenrechner zu lösen. Als einziges Hilfsmittel ist in diesem Teil die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen.

¹Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/TI-Nspire> (cc) (12.1.2019), bearbeitet

Auftrag 1 (10 P)

Gegeben sind die Punkte $A = (1, 2, 3)$, $B = (8, -2, 7)$, $C = (12, 6, 8)$ und $D = (5, 10, 4)$. Wir betrachten die Pyramide mit der Grundfläche $ABCD$ und der Spitze S . Die Höhe der Pyramide beträgt 81.

(a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche quadratisch ist. (3 P)

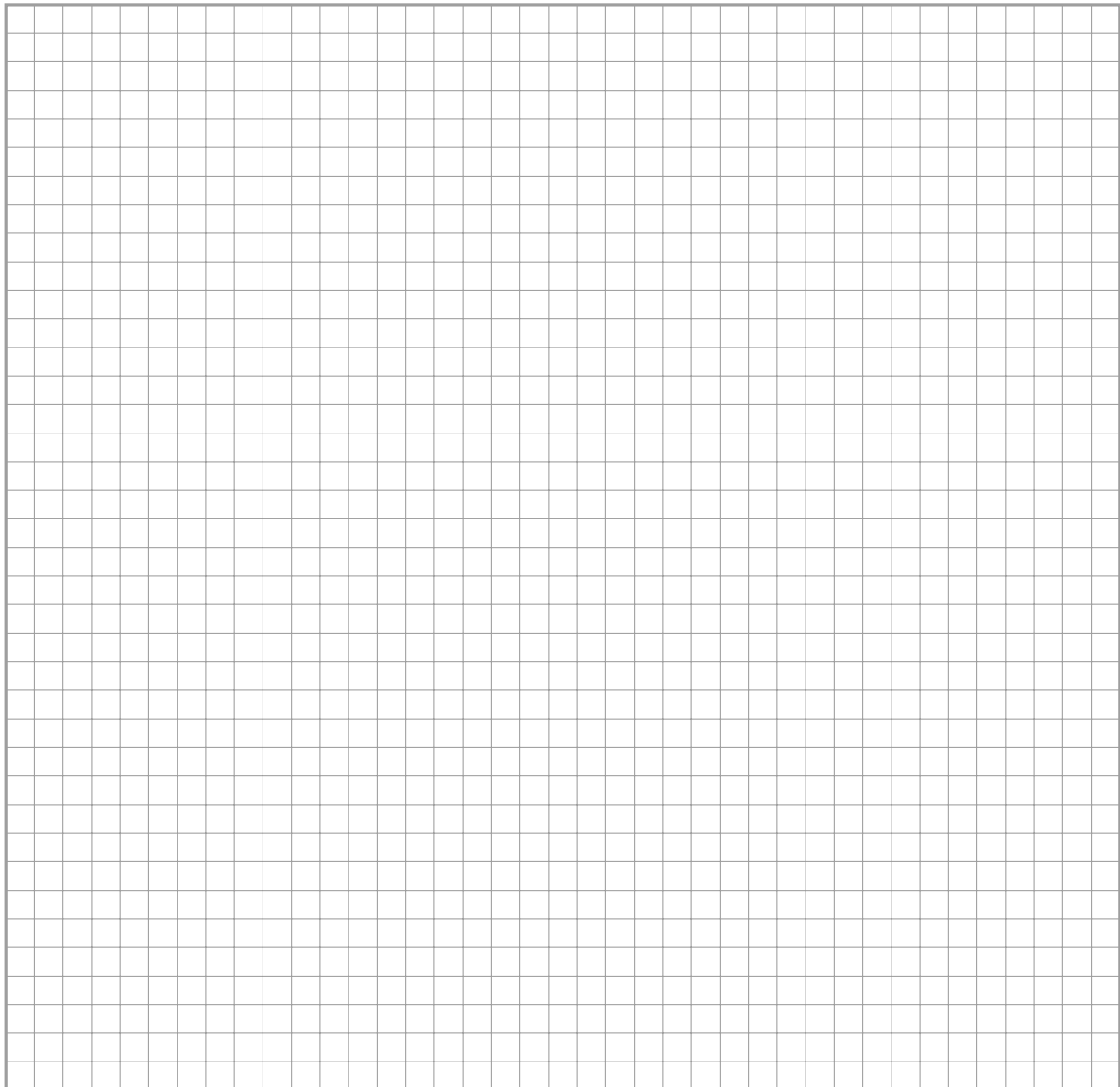
(b) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide. (1 P)

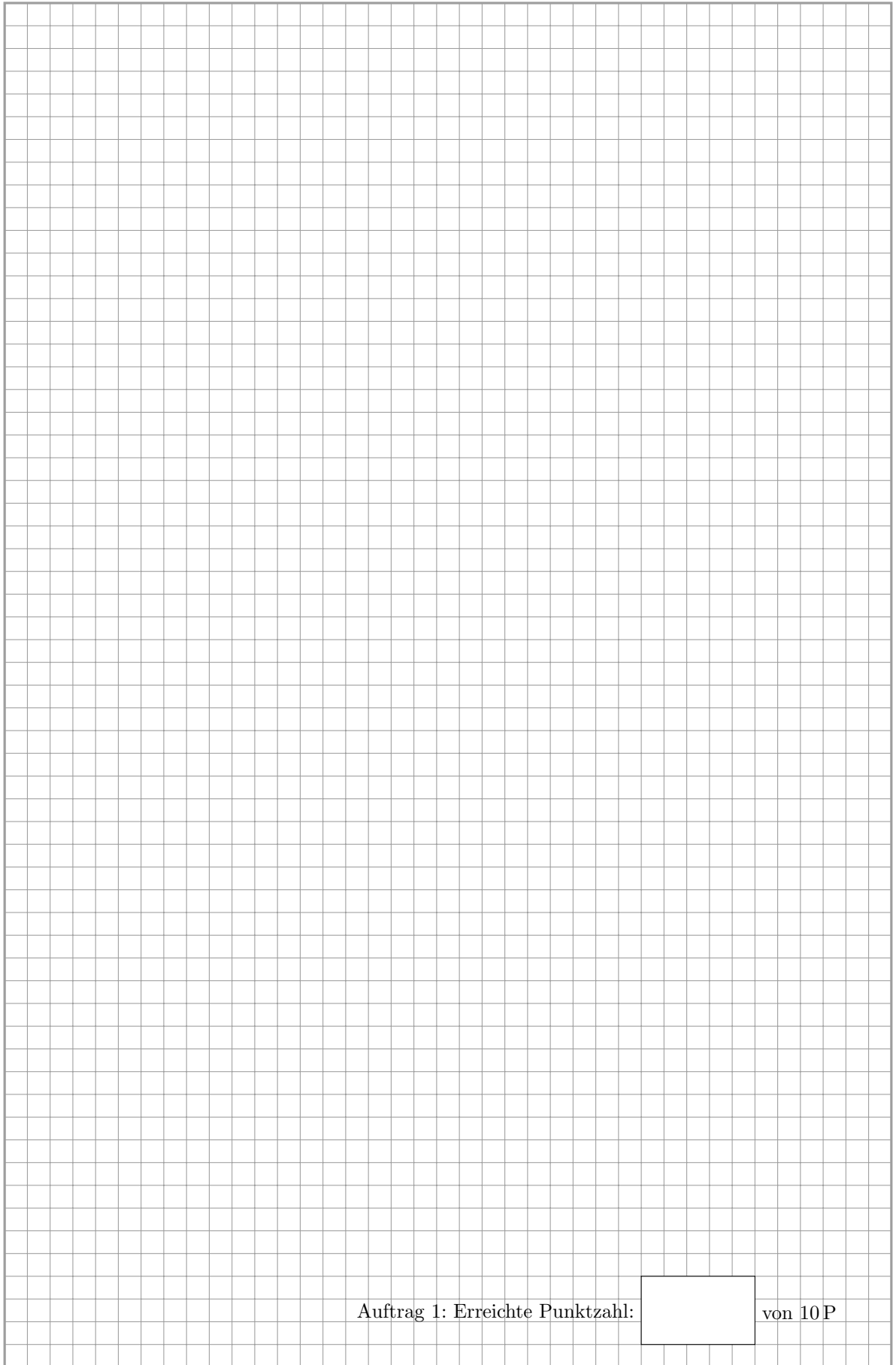
Hinweis: Sie brauchen das Resultat nicht fertig auszurechnen.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze S , wenn S senkrecht zur Grundfläche über der Ecke A liegt (eine Lösung reicht). (3 P)

(d) Die Pyramide wird auf halber Höhe mit einer Ebene, die parallel zur Grundfläche ist, geschnitten. Wie gross ist die Schnittfläche? (1 P)

(e) Die Pyramide $ABCD S$ wird nun um ihre Kante \overline{AB} als Drehachse um 90° gedreht (in welche der beiden möglichen Richtungen, dürfen Sie selbst entscheiden). Geben Sie die Koordinaten des Punktes S' an, in dem nun die Spitze der Pyramide liegt. (2 P)





A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 1: Erreichte Punktzahl:

von 10 P

Auftrag 2 (8 P)

Bei den folgenden 16 Aussagen müssen Sie jeweils ankreuzen, ob sie wahr oder falsch sind.
Die Bewertung erfolgt nach folgendem Schema:

- korrekte Antwort: +0.5 P
- die ersten vier inkorrekten Antworten: 0 P
- jede weitere inkorrekte Antwort: -0.5 P
- keine Antwort: 0 P

Das Minimum der Punktesumme beträgt 0 P.

(a) In den folgenden Aussagen sind Winkel im Bogenmass zu lesen und e steht für die Eulersche Zahl.

	wahr	falsch	
$\sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\log_4(20) > \log_5(24)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$e^{2019} + e^{2019} < e^{2020}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\cos(2019 \cdot \pi) = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\sin(e) > \sin(3)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)

(b) Wie betrachten im Folgenden komplexe Zahlen z und bezeichnen, wie üblich, mit \bar{z} die zu z komplex konjugierte Zahl.

	wahr	falsch	
$\operatorname{Re}(\operatorname{Im}(z)) = \operatorname{Im}(\operatorname{Re}(z)).$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\overline{z - i} = \bar{z} + i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Die Gleichung $(z + i) \cdot (\bar{z} - i) = 16$ definiert ein Kreis mit Radius 4 in der komplexen Zahlenebene.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)

- (c) Die Punkte A, B, C, D, E und F sind Eckpunkte eines geraden Prismas mit dreieckiger Grundfläche. Das Volumen des Prismas beträgt 2 und die Höhe $|\overline{AD}| = 1$.

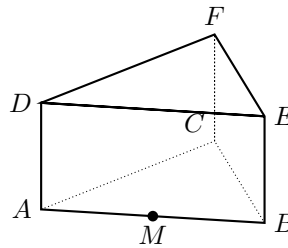


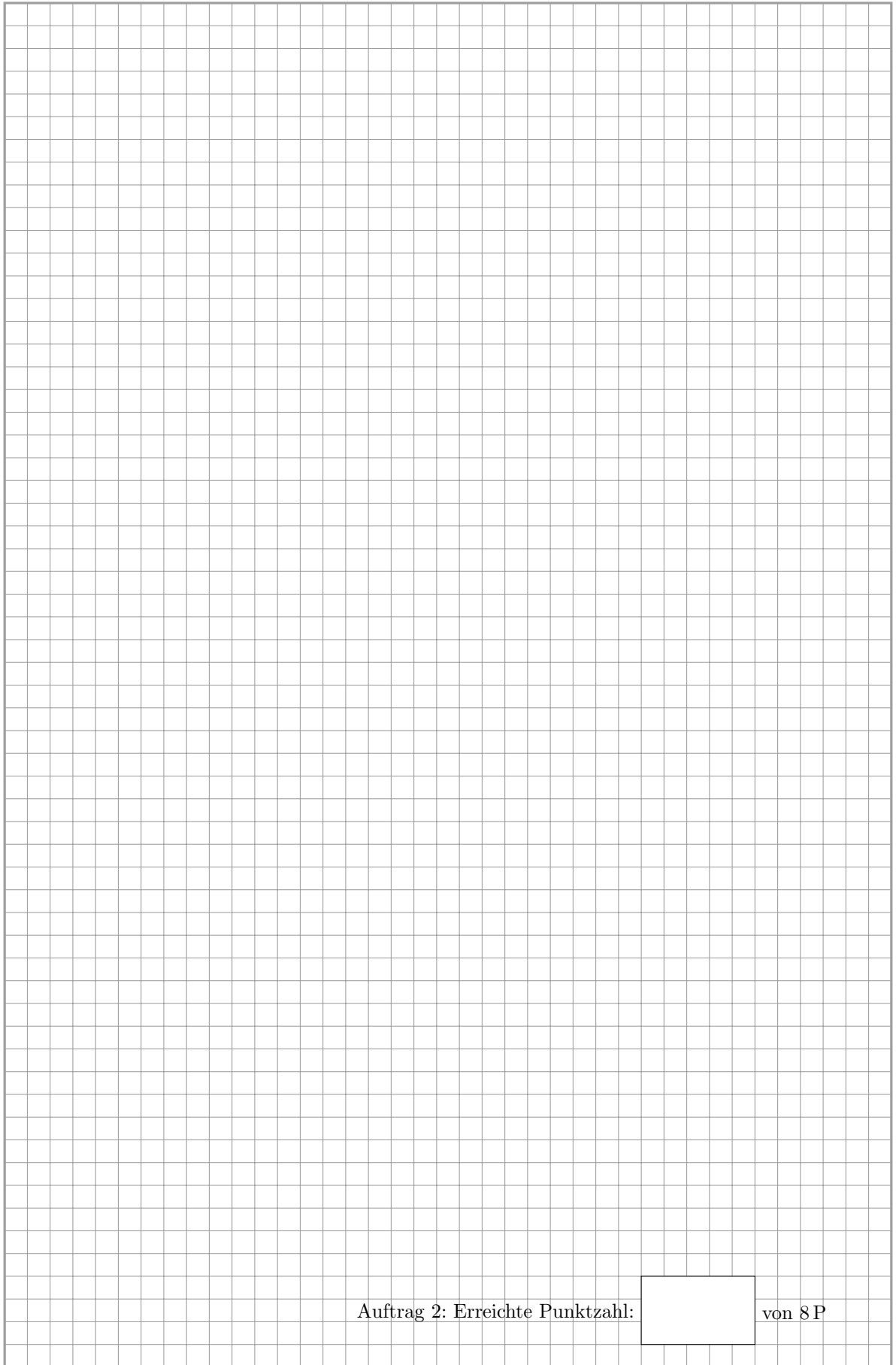
Abbildung 2: Gerades Prisma mit dreieckiger Grundfläche

	wahr	falsch	
$ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} > 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Wenn M den Mittelpunkt von A und B bezeichnet, gilt $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
Die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Ebene $\Phi: 2 \cdot x - y + 3 \cdot z - 17 = 0$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)

(d)

	wahr	falsch	
$\int_{2018}^{2019} \sin(\pi \cdot x) dx < 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
<p>Die Kurve mit der Parametrisierung</p> $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = t^2 \end{cases}, \quad -5 \leq t \leq 5$ <p>ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
<p>Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine geometrische Folge mit positiven Gliedern, so ist $(\ln(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine arithmetische Folge.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)
<p>Für jede Zufallsgrösse X mit Erwartungswert μ gilt $E(X - \mu) = 0$.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(0.5 P)





Auftrag 2: Erreichte Punktzahl:

von 8 P

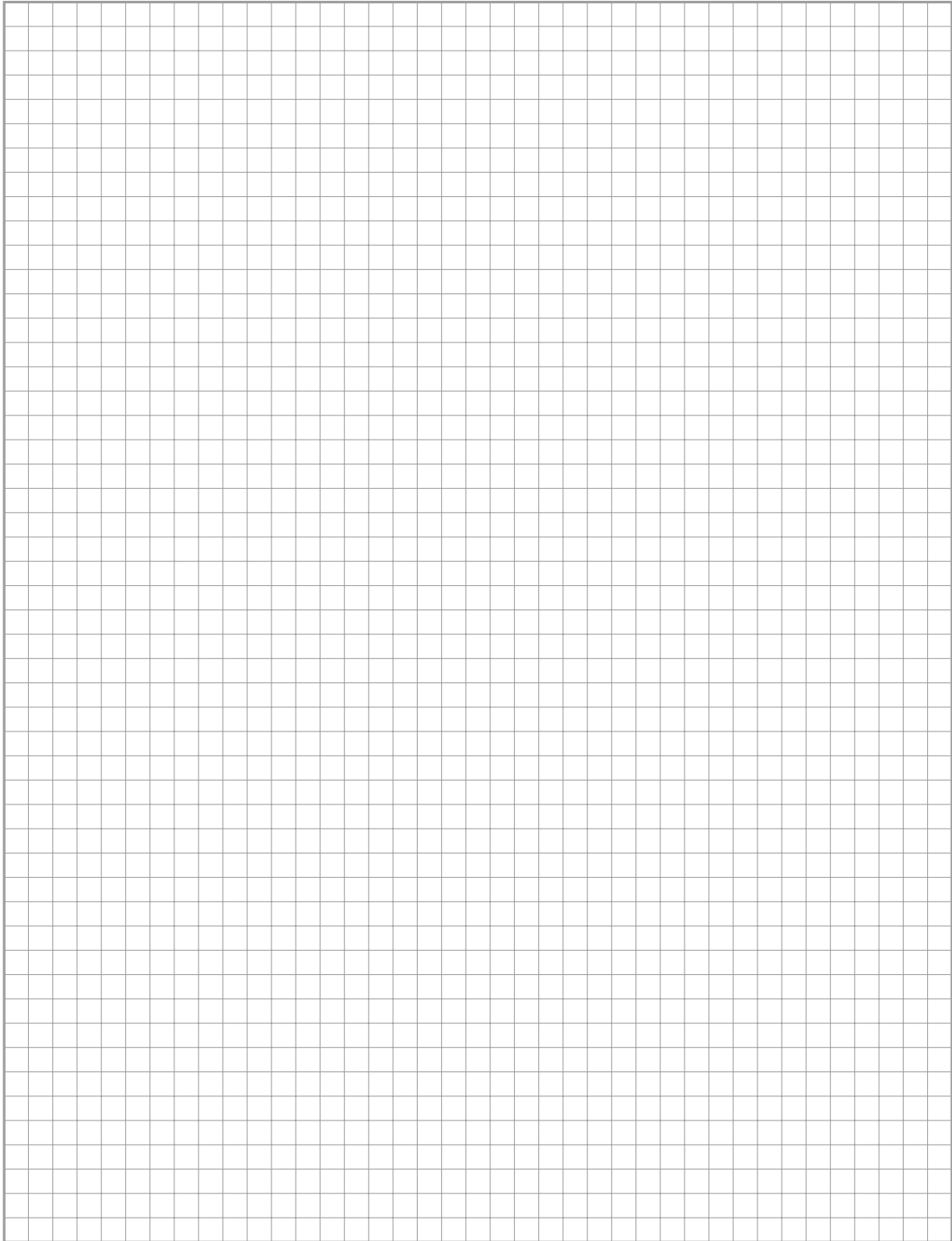
Auftrag 3 (3.5 P)

Die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| + |z + 1| = 4\}.$$

definiert eine Ellipse in der komplexen Zahlenebene. Bestimmen Sie die entsprechenden Halbachsen a und b .

(3.5 P)



A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 3: Erreichte Punktzahl:

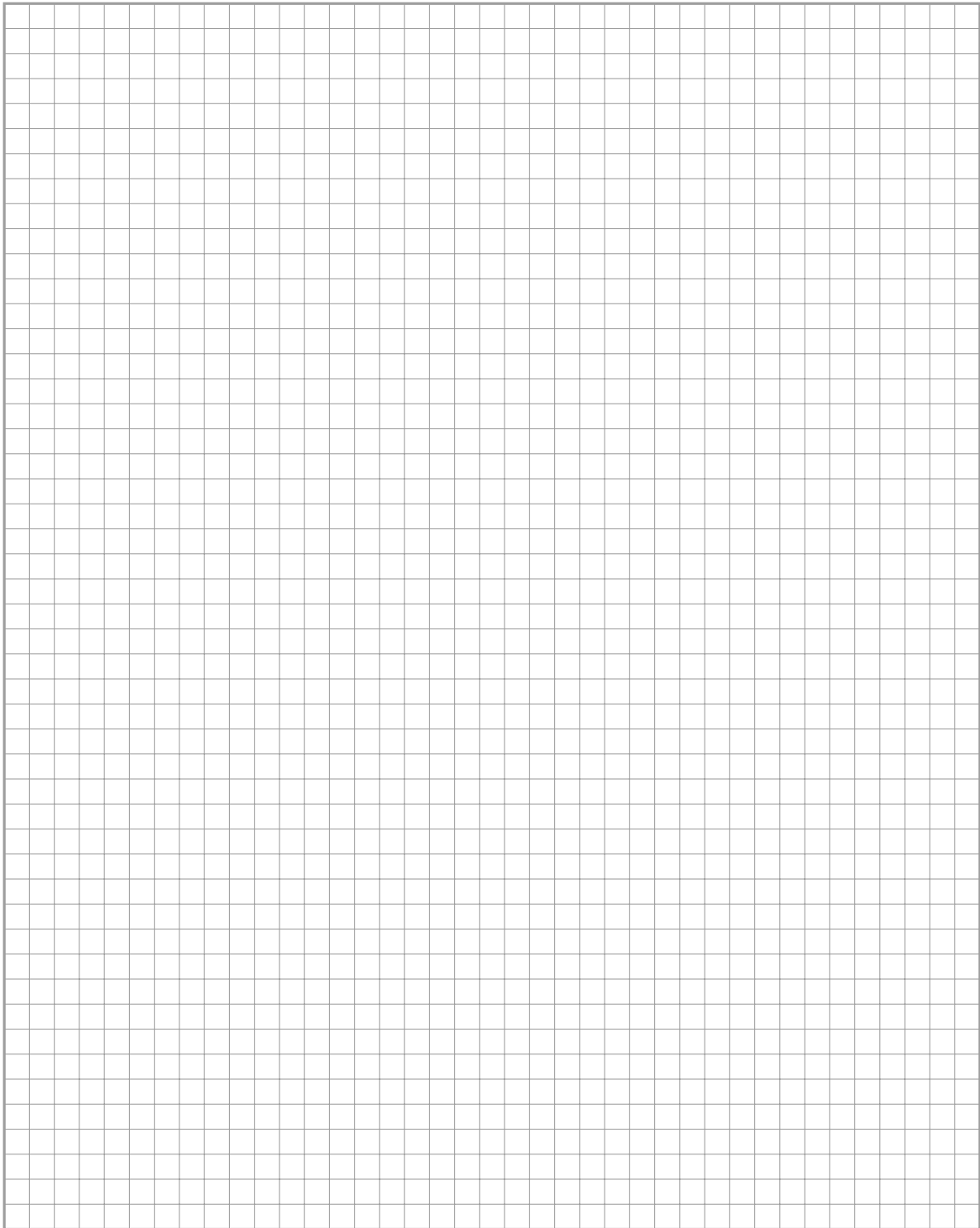
von 3.5 P

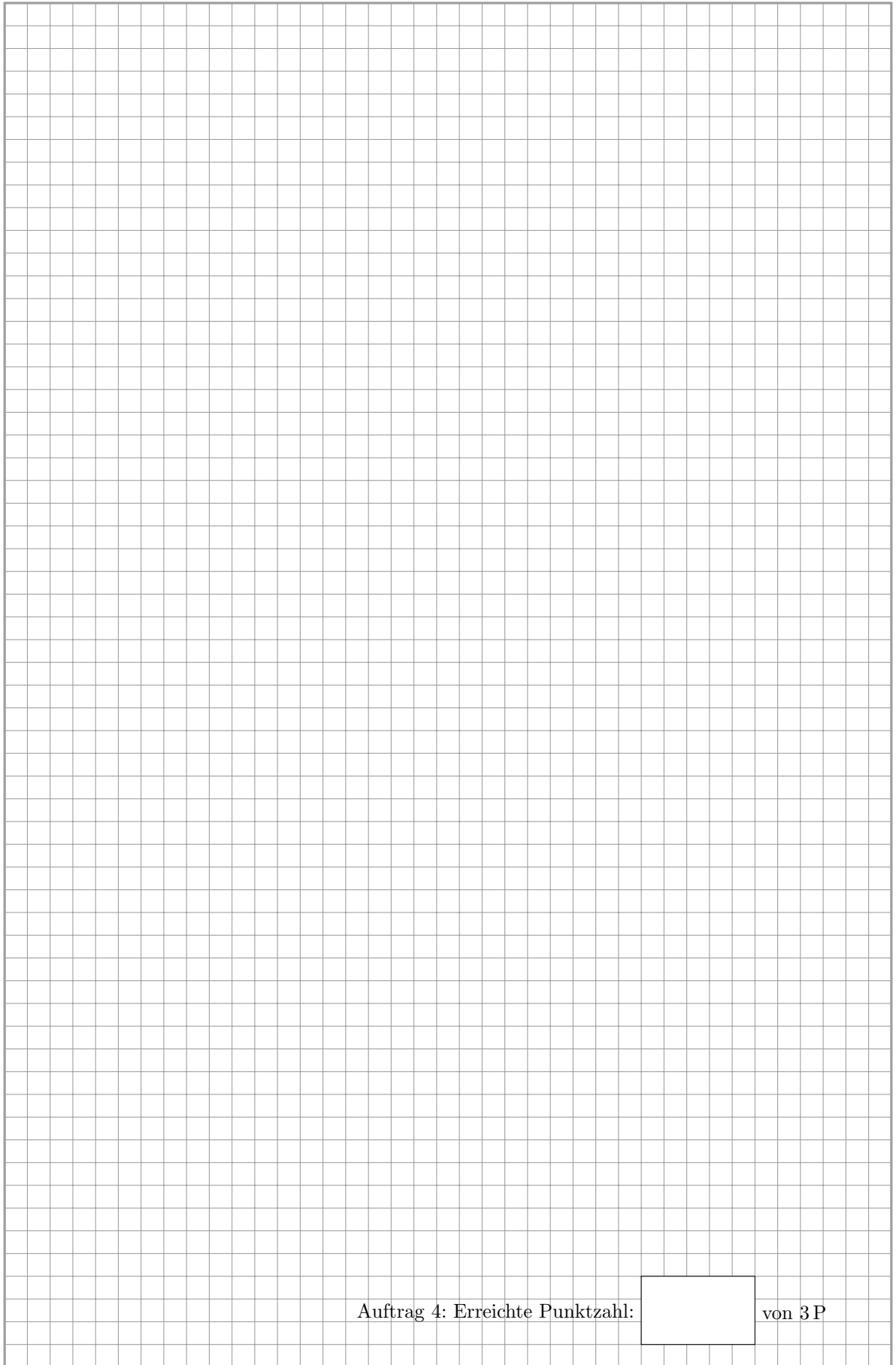
Auftrag 4 (3 P)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x \cdot e^x.$$

- (a) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$. (1.5 P)
- (b) Stellen Sie eine Vermutung für die n -te Ableitung $f^{(n)}(x)$ auf und beweisen Sie diese per Induktion. (1.5 P)

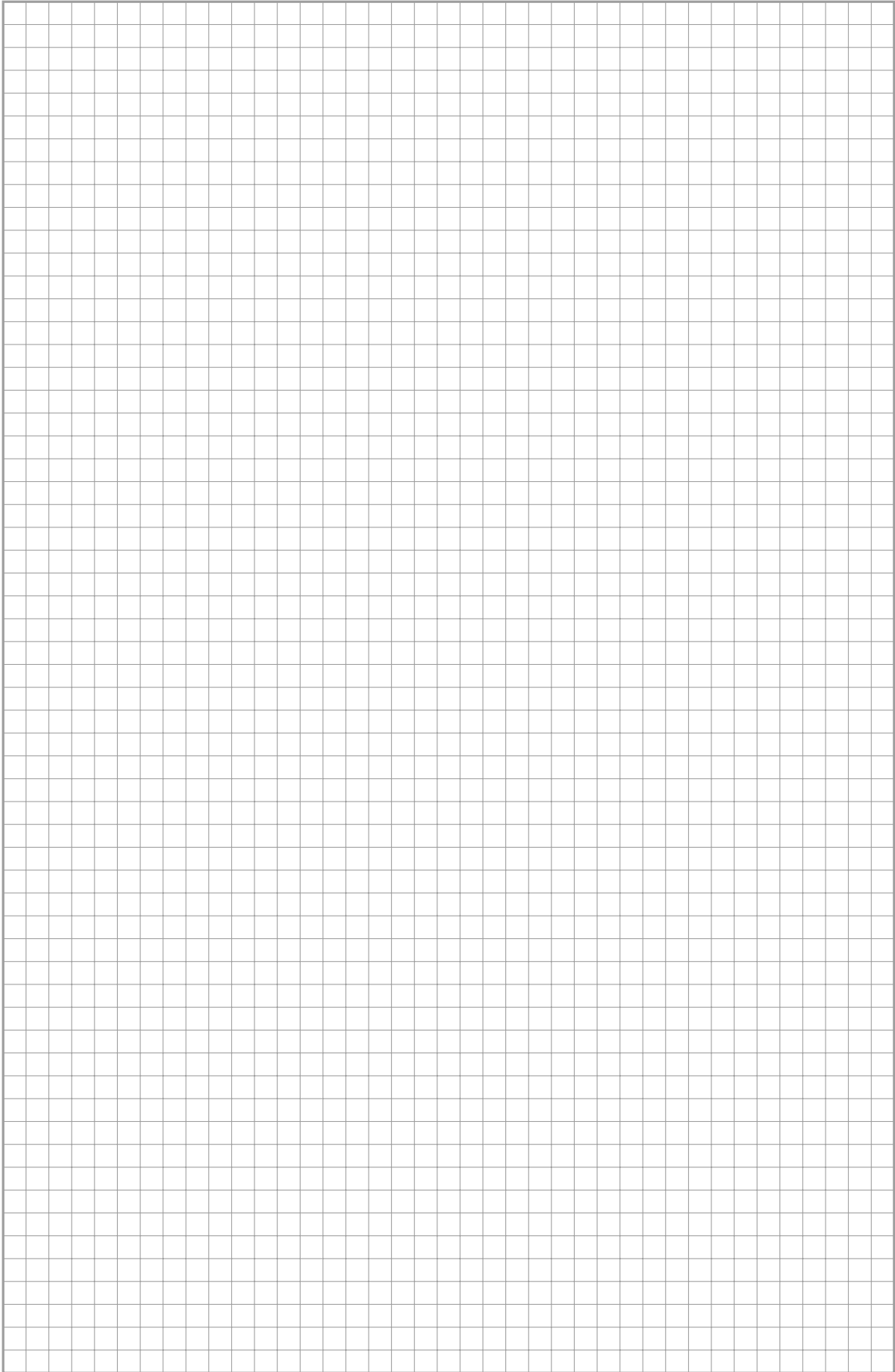




A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 4: Erreichte Punktzahl:

von 3 P



Name, Vorname:	Klasse:
----------------	---------

Teil 2: Mit Rechner



Abbildung 3: Taschenrechner erlaubt²

Für die Aufträge 5 bis 10 sind als Hilfsmittel der Taschenrechner (TI-nspire CX CAS) und die Formelsammlung (Adrian Wetzel) zugelassen. Sie erhalten Ihren Taschenrechner nach der Abgabe von Teil 1.

²Quellen: <https://de.wikipedia.org/wiki/TI-Nspire> (cc) (12.1.2019) und <https://openclipart.org/detail/200606/primary-ok> (cc) (12.1.2019), bearbeitet

Auftrag 5 (5.5 P)

Wir bauen einen Turm aus zylinderförmigen Bausteinen mit jeweils vier mal so grossem Radius wie Höhe. Wir beginnen mit einem grossen schwarzen Baustein mit dem Volumen 2019 m^3 . Darauf legen wir einen (volumenmässig) um 40% kleineren weissen Stein und darauf einen 40% kleineren schwarzen Stein usw.

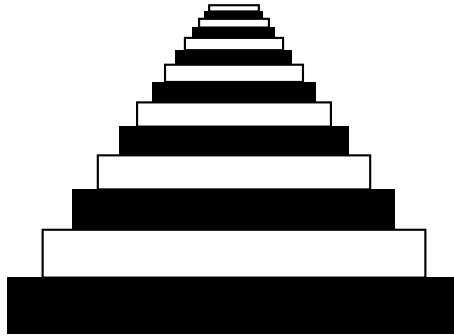
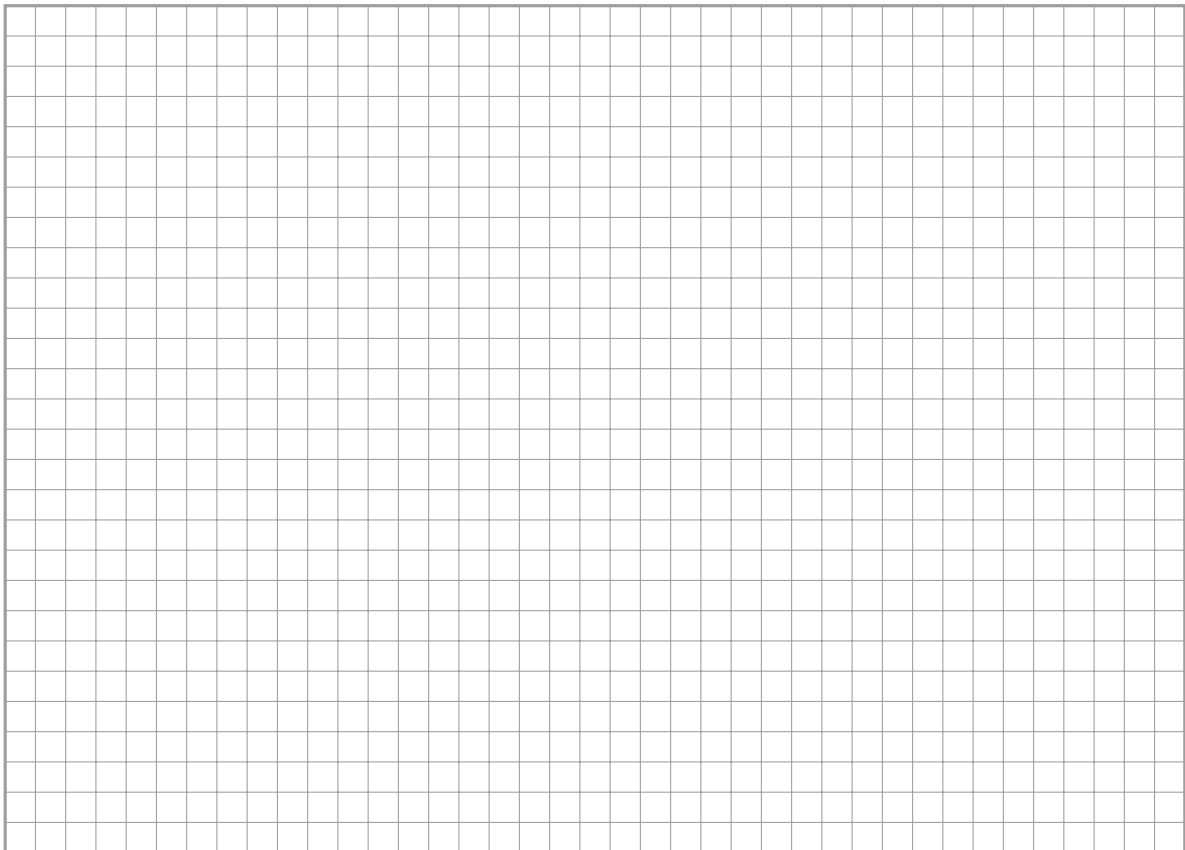
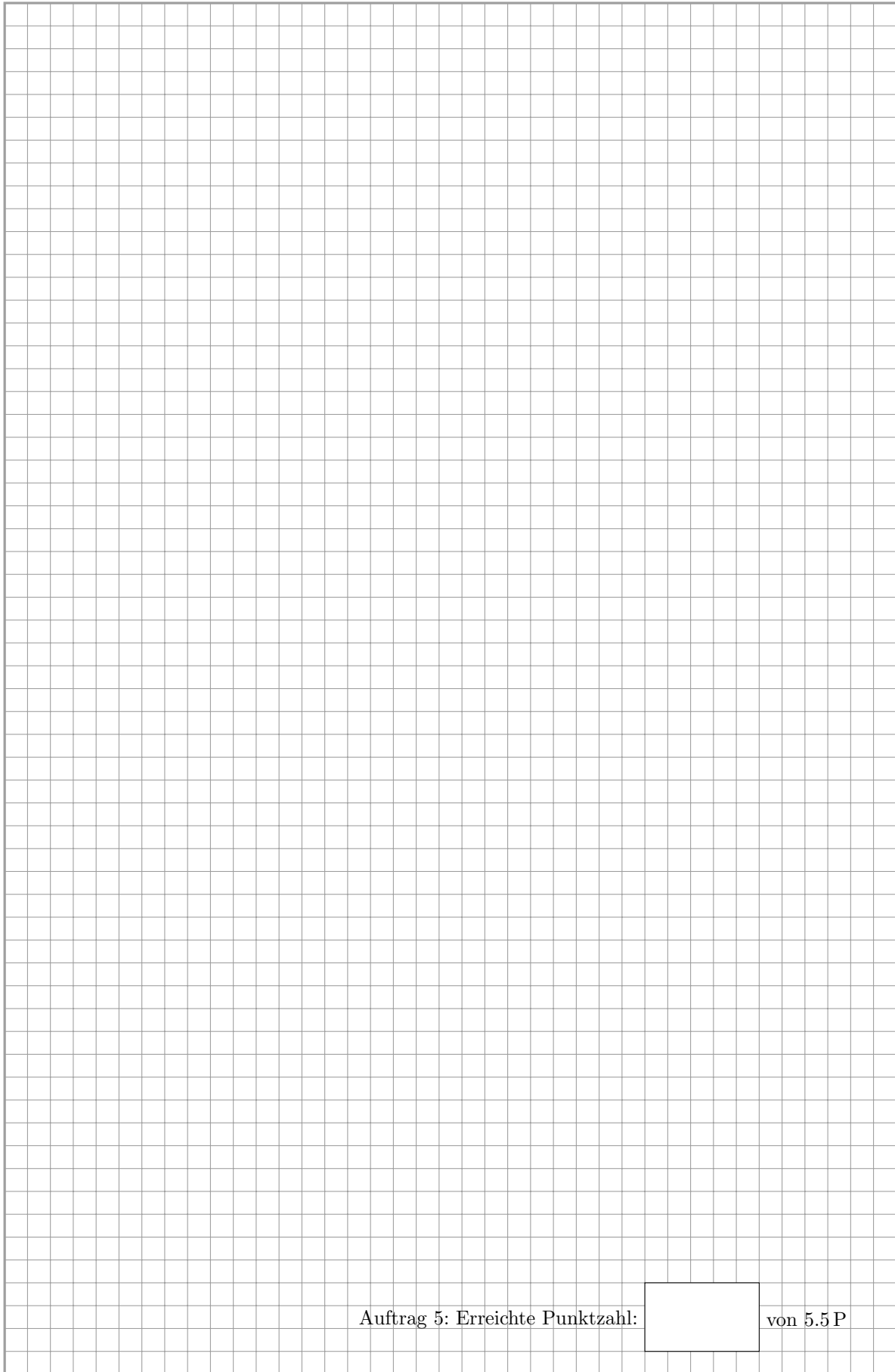


Abbildung 4: Turm mit 14 Bausteinen.

- (a) Bestimmen Sie Radius r_1 und Höhe h_1 des grössten Bausteins. (1.5 P)
- (b) Um den Turm zu bauen, brauchen wir einen Kran, der die Steine vom Boden auf die entsprechende Höhe hebt. Wie hoch muss der Kran mindestens reichen, damit wir den Turm in jedem Fall bauen können, unabhängig davon wie viele Steine wir verwenden? (2 P)
- (c) Wir bauen den Turm nun so lange, bis auf dem obersten Baustein zum ersten mal kein Fünffrankenstück (Durchmesser 31.45 mm) mehr komplett Platz hat. Welche Farbe hat nun der oberste Baustein? (2 P)





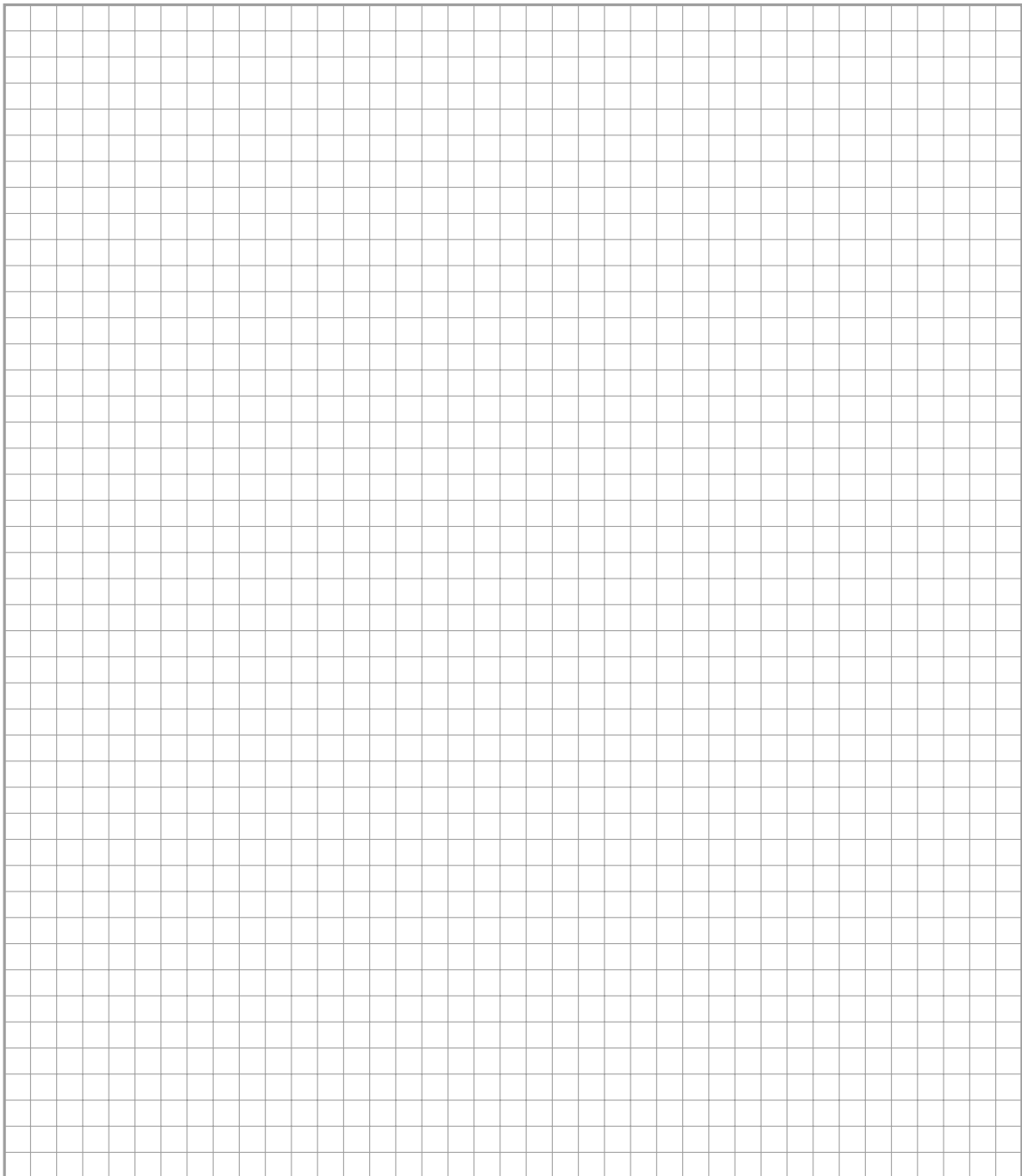
Auftrag 5: Erreichte Punktzahl:

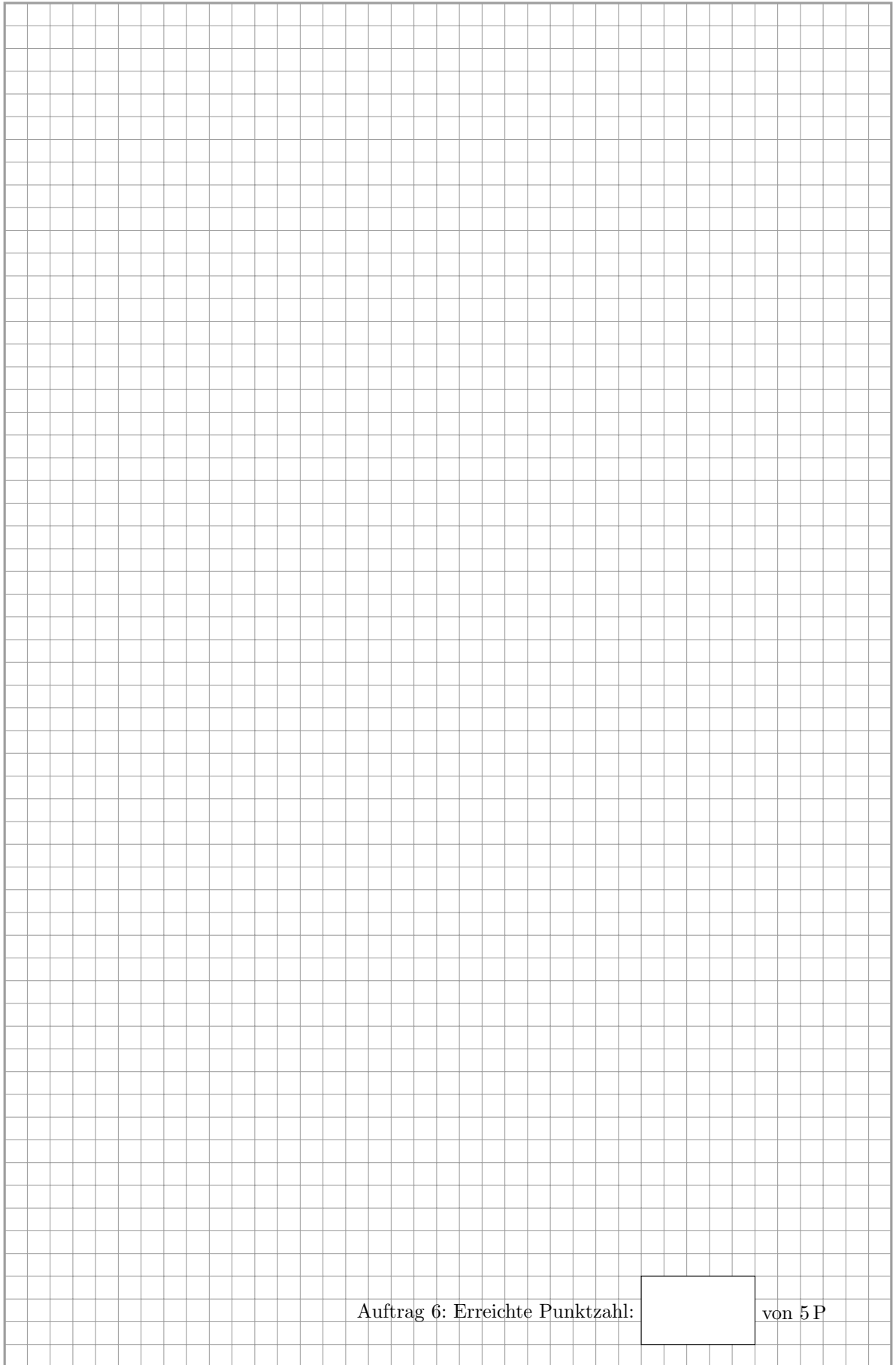
von 5.5 P

Auftrag 6 (5 P)

Eine Klasse mit 12 Schülerinnen und 8 Schüler wird für eine Sonderwoche in vier verschiedene Kurse gleichmässig aufgeteilt.

- (a) Auf wie viele Arten kann das geschehen? (1.5 P)
- (b) Auf wie viele Arten kann das geschehen, wenn in jedem Kurs mindestens eine Schülerin sein muss? (2 P)
- (c) Der Lehrer verteilt nun Süssigkeiten unter den Kursen. Er hat 100 identische Süssigkeiten und verteilt diese rein zufällig – d.h. es könnte auch ein Kurs komplett leer ausgehen. Auf wie viele Arten kann er die Süssigkeiten an die Kurse verteilen? (1.5 P)





Auftrag 6: Erreichte Punktzahl:

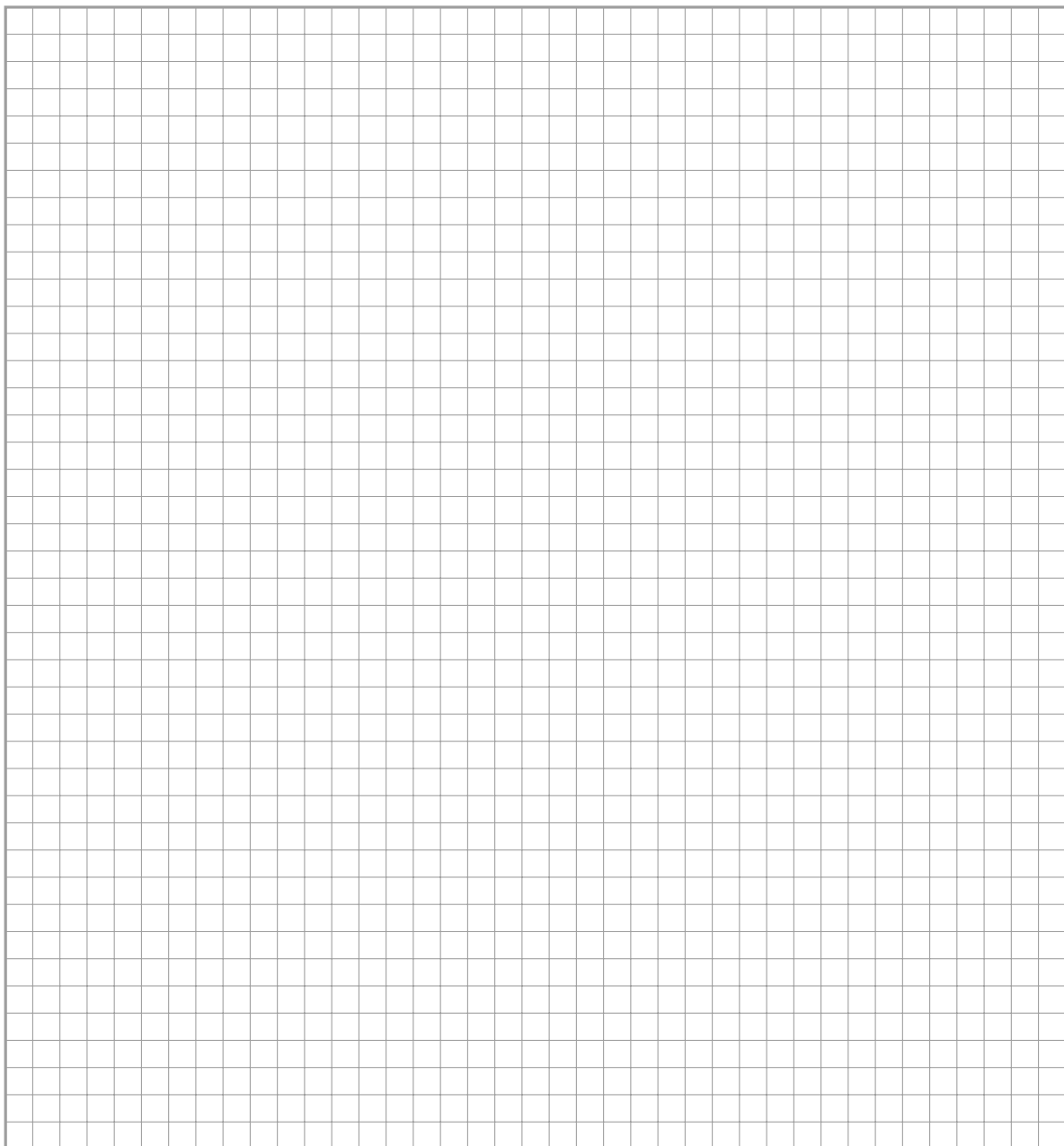
von 5 P

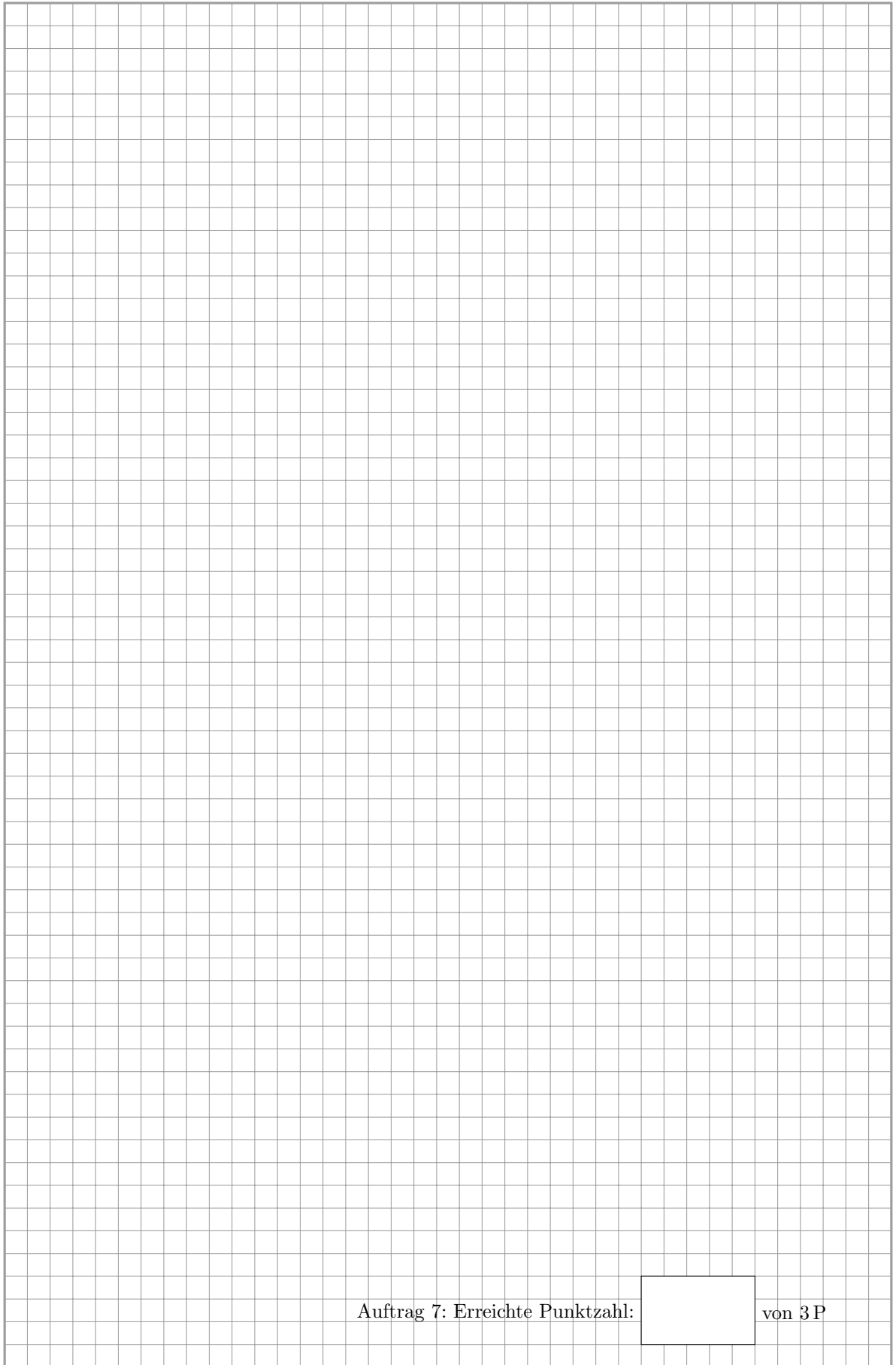
Auftrag 7 (3P)Gegeben ist eine Zufallsgrösse X mit der folgenden Verteilung:

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	$2 \cdot a^2$	$3 \cdot a$	$3 \cdot a^2 + 2 \cdot a$	$2 \cdot a^2 + a$

Tabelle 5: Verteilung von X

- (a) Bestimmen Sie den Wert von a . (1P)
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$. (1P)
- (c) Berechnen Sie den Median von X . (1P)





Auftrag 7: Erreichte Punktzahl:

von 3 P

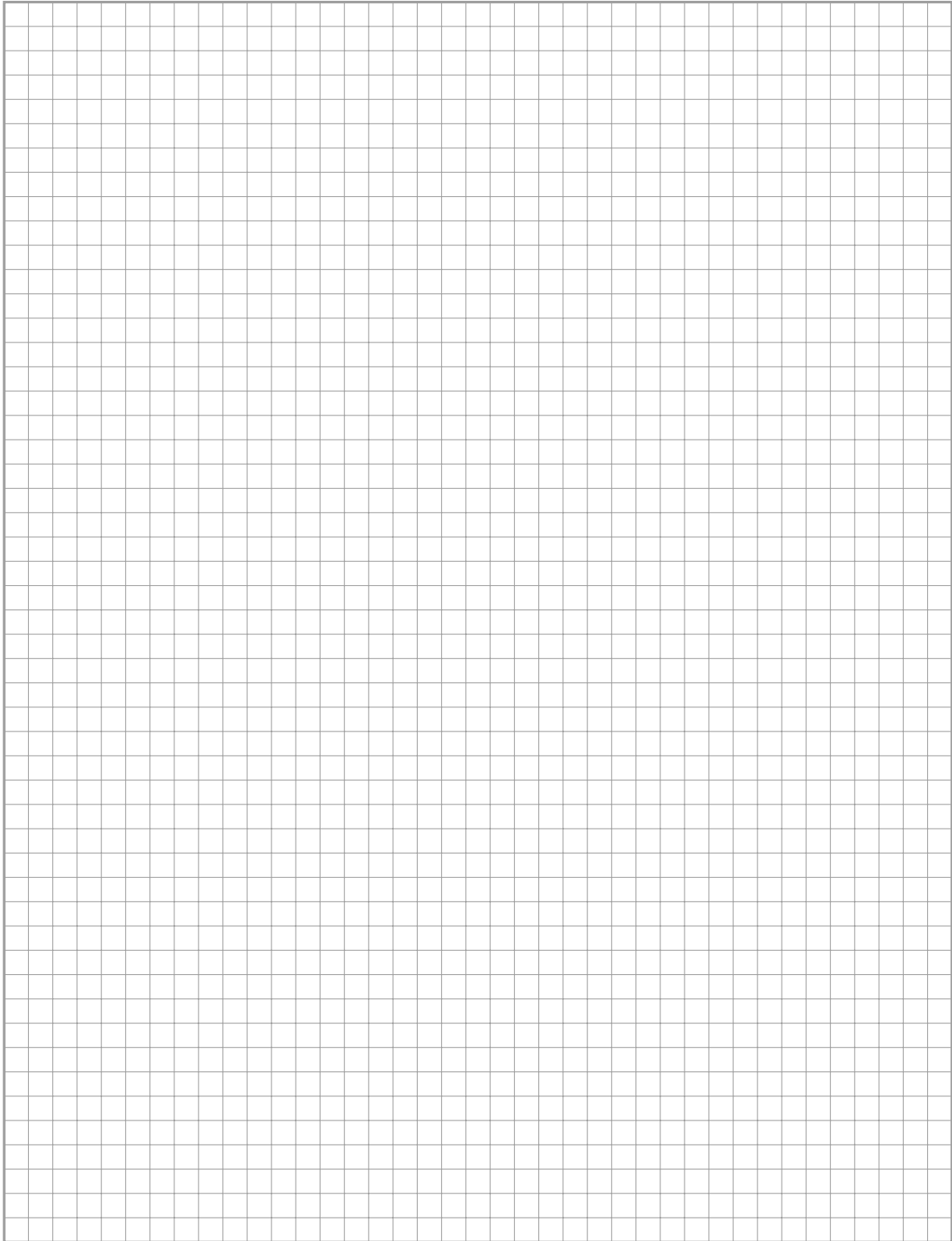
Auftrag 8 (2.5 P)

Gegeben ist die Hyperbel H mit der Gleichung

$$H : x^2 - (y - 2)^2 = 1.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P auf H im ersten Quadranten, der minimalen Abstand zum Ursprung $(0, 0)$ hat.

(2.5 P)



A large grid of graph paper for calculations, consisting of 30 columns and 40 rows of small squares.

Auftrag 8: Erreichte Punktzahl:

von 2.5 P

Auftrag 9 (6 P)

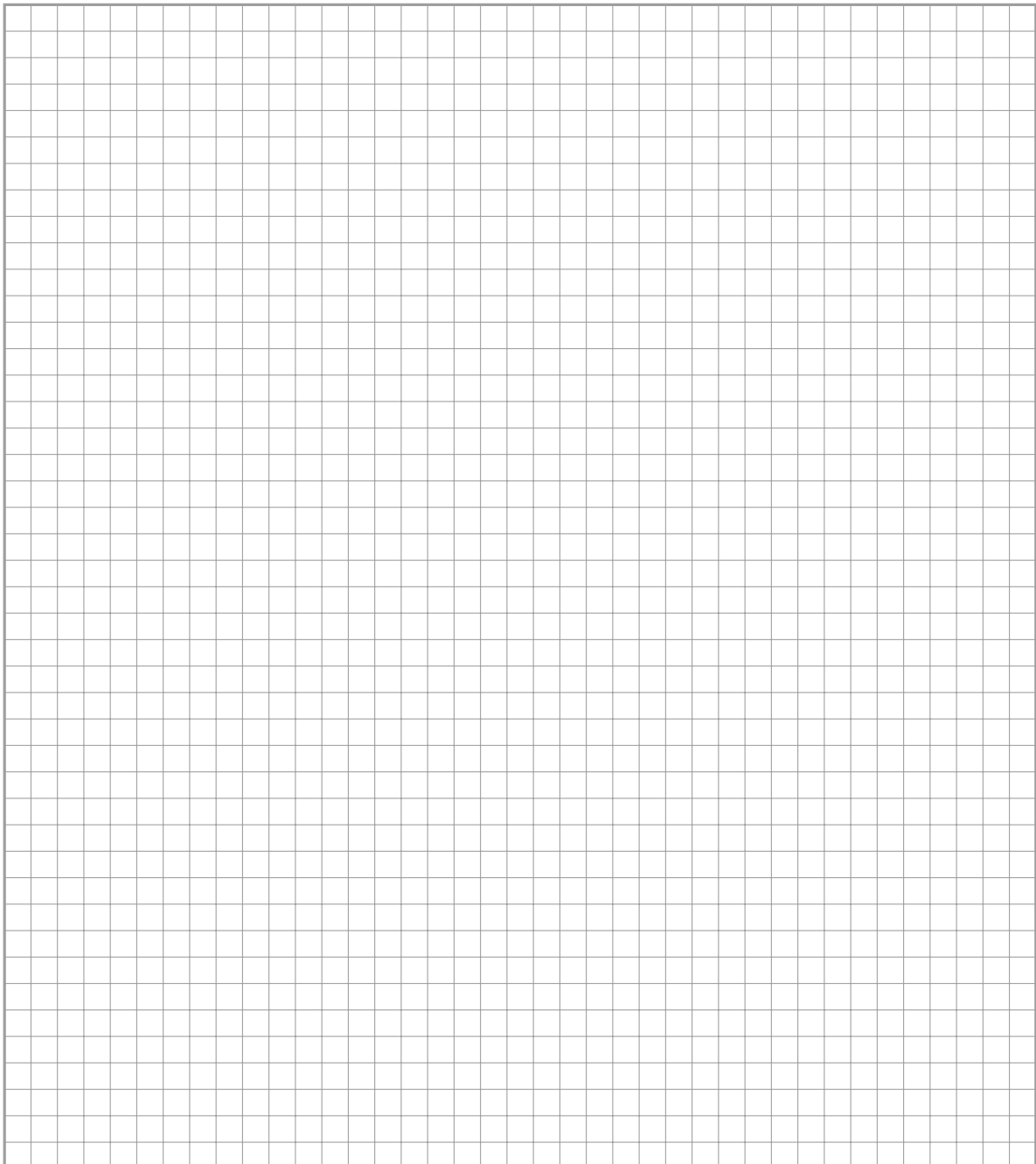
Das Körpergewicht X eines Neugeborenen sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 3600$ g.
Die Hälfte aller Neugeborenen wiegt zwischen 3250 g und 3950 g.

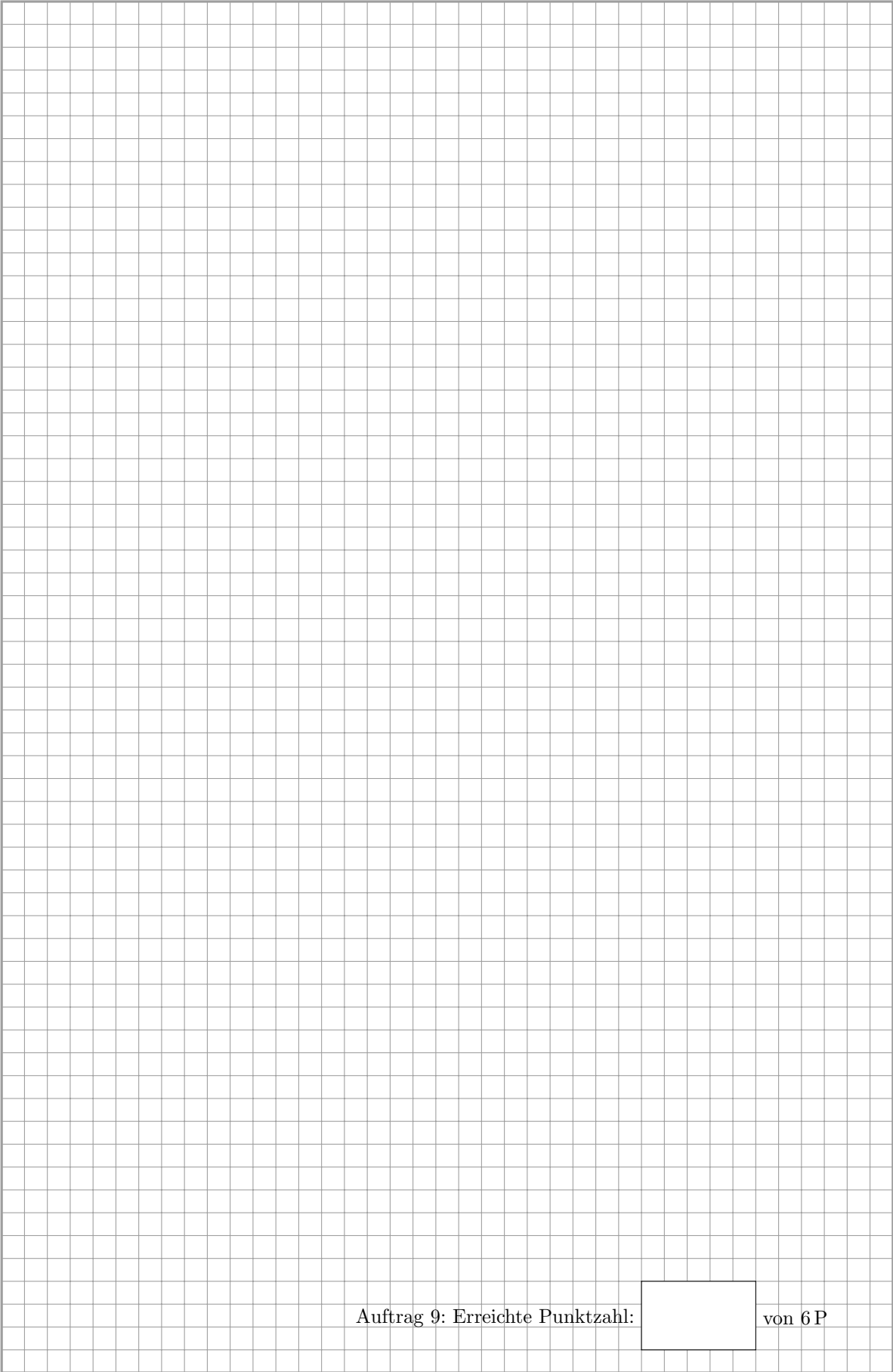
- (a) Bestimmen Sie die Standardabweichung σ von X . (3 P)

Hinweis: Falls Sie (a) nicht lösen können, arbeiten Sie mit (der falschen Lösung) $\sigma = 520$ g weiter.

- (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Neugeborenes mehr als 3000 g wiegt? (1.5 P)

- (c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 2019 Neugeborenen höchstens 1777 mehr als 3000 g wiegen? (1.5 P)





A large grid of graph paper for calculations, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares.

Auftrag 9: Erreichte Punktzahl:

von 6 P

Auftrag 10 (7 P)

Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 4$ wird im passenden Bereich mehrmals um den Ursprung rotiert, so dass die regelmässige «Sternkurve» von Abbildung 5 entsteht.

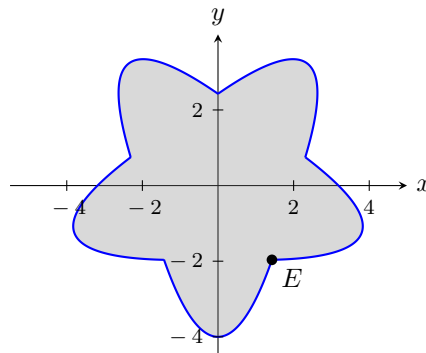
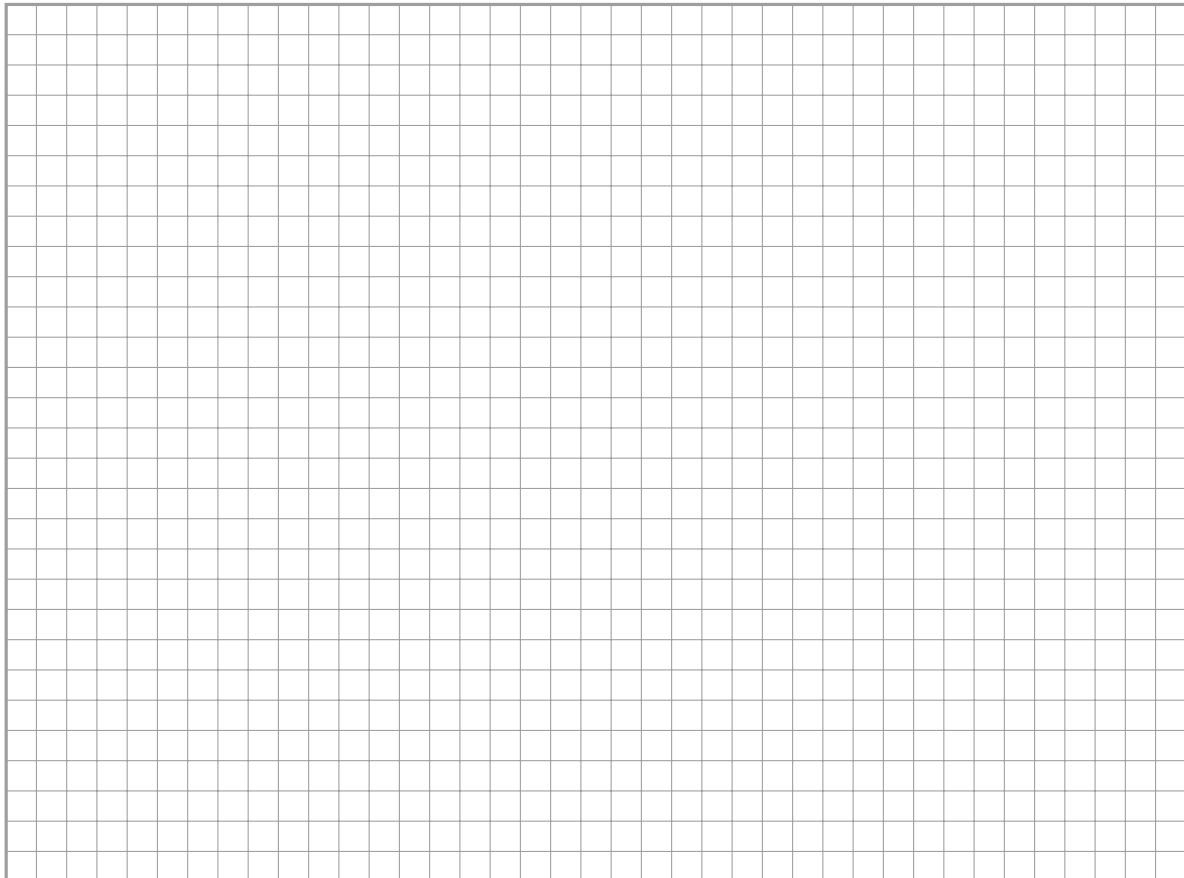


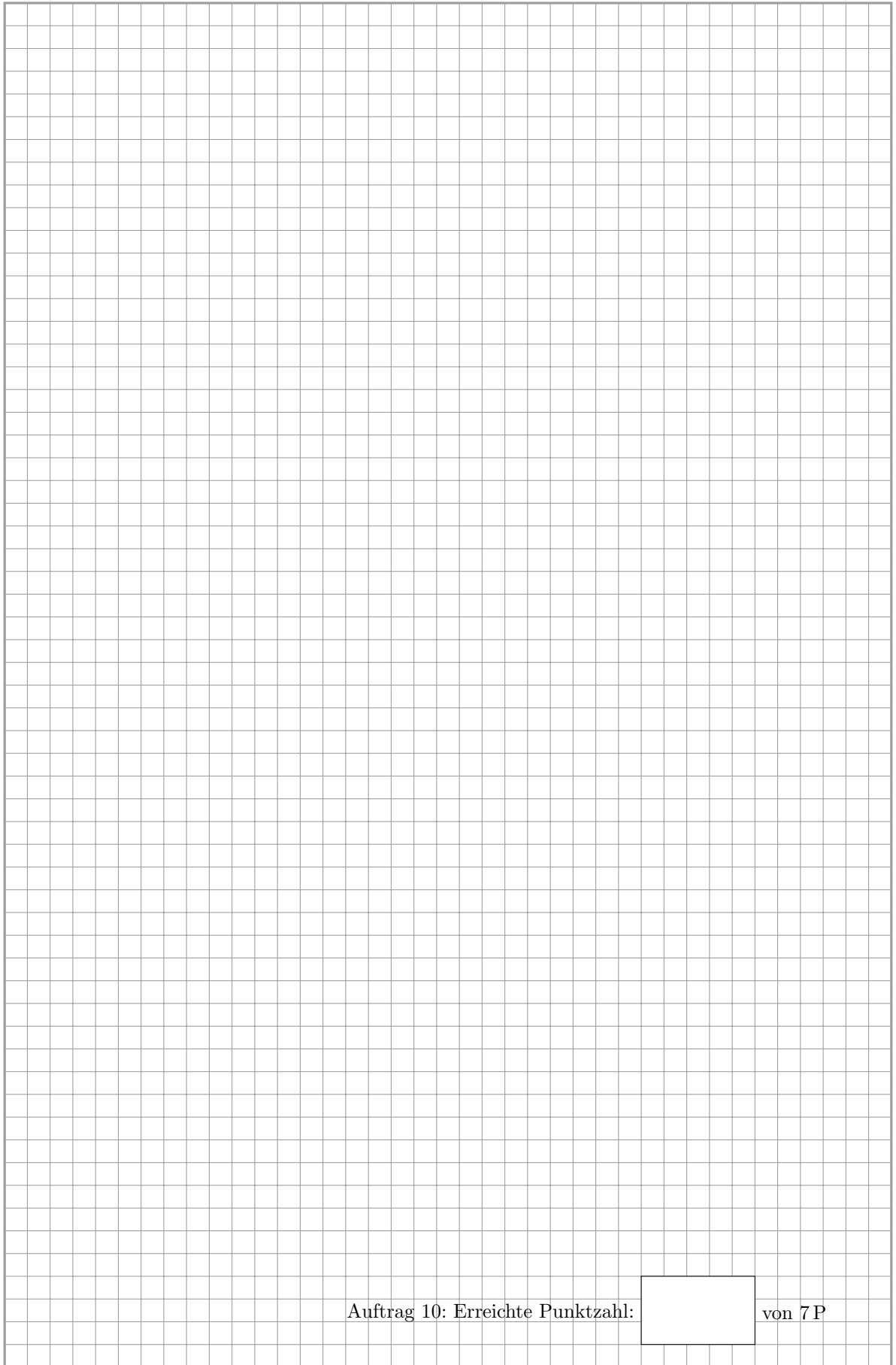
Abbildung 5: «Sternkurve»

- (a) Berechnen Sie die Koordinaten des «Eckpunktes» E (siehe Abbildung 5). (2.5 P)

Hinweis: Falls Sie (a) nicht lösen können, rechnen Sie mit der (*falschen*) Lösung $E = (1.5, -1.75)$ weiter.

- (b) Berechnen Sie den Inhalt der in Abbildung 5 grau hinterlegten Fläche. (2 P)
- (c) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der «Sternkurve» und der Gerade mit der Gleichung $y = x$ im ersten Quadranten. (2.5 P)





Auftrag 10: Erreichte Punktzahl:

von 7 P

