Schriftliche Maturprüfung Mathematik SPF
Datum: 16.5.2018
Zeit: 08:00-12:00
Formelsammlung: Adrian Wetzel
Taschenrechner: TI-NSpire CX CAS (nur im Teil 2)

Name: ....., Klasse: .....

Es gelten die folgenden Bedingungen:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Die Notenskala ist unten aufgeführt.
- Ablauf: Zu Beginn legen Sie Ihren Taschenrechner vorne bei der Aufsichtsperson hin. Sie erhalten dann die gesamte Prüfung, die Sie komplett ohne Taschenrechner bearbeiten können. Wenn Sie den Teil ohne Rechner erledigt haben, legen Sie alle dazugehörigen Blätter (inklusive Aufgaben) in das vorhandene Couvert, verschliessen es und geben es der Aufsichtsperon ab (Achtung: Nur diejenigen Blätter, die im verschlossenen Couvert sind, werden für die Beurteilung des 1. Teils beachtet). Danach können Sie Ihren Taschenrechner beziehen und den Rest der Prüfung bearbeiten.
- Der Lösungsweg muss bei allen Aufgaben ersichtlich und vollständig sein.
- Der Einsatz des Taschenrechners (im Teil 2) ist klar und nachvollziehbar anzugeben. Der Speicher des Taschenrechners muss bei Prüfungsbeginn vollständig gelöscht sein.
- Geben Sie Resultate exakt oder auf zwei Stellen gerundet an. Im Teil 1 dürfen Wurzelterme stehen gelassen werden.

Klasse	**Examinatorin/Examinator**
4A	
4Eb	

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Punkte:	4	6	8	8	4	11	11	52
erreichte Punktzahl:								

$$\text{Note} = \frac{\text{erreichte Punktzahl}}{44} \cdot 5 + 1 \text{ (gerundet auf halbe Noten)} = \boxed{}$$

Teil 1: ohne Taschenrechner

Name: ....., Klasse: .....

Aufgabe 1 (*4 Punkte*)

Die nachfolgenden Teilaufgaben (1.1.), (1.2.) und (1.3.) sind unabhängig von einander.

Bestimmen Sie jeweils die Gleichung einer nicht-konstanten Funktion f, die die gegebenen Eigenschaften besitzt.

1.1. [1 P.]

$$\int_2^7 f(x)\,dx = 0\ .$$

1.2. [$1\frac{1}{2}$ P.]

$$f(1) = f(3) = f(-5) = 0 \quad \text{und} \quad f(0) = 1\ .$$

1.3. [$1\frac{1}{2}$ P.]

$$f'(2) = f'(-2) = 0 \quad \text{und} \quad f(0) = 1\ .$$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Die beiden Punkte $A(5|0|2)$ und $B(-3|2|0)$ liegen auf dem Umfang eines Kreises K, dessen Mittelpunkt M auf der Geraden g liegt.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.1. Berechnen Sie die Koordinaten von M. [2 P.]

2.2. K ist der Grundkreis eines geraden Kreiskegels mit der Spitze $C(0|2|?)$. Berechnen Sie die fehlende Koordinate von C. [2 P.]

Hinweis: Falls Sie 2.1. und 2.2. nicht lösen konnten, so rechnen Sie mit den Punkten $M(1|4|4)$ und $C(0|2|6)$ weiter.

2.3. Ein schiefer Kreiskegel, dessen Grundkreis mit dem Grundkreis des geraden Kegels aus 2.2. übereinstimmt, der aber ein doppelt so grosses Volumen hat, besitzt eine Spitze S, die auf der y-Achse liegt. Berechnen Sie die Koordinaten von S. [2 P.]

Aufgabe 3 (*8 Punkte*)

Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Bewertung:

- Richtige Antwort: +0.5 Punkte
- Die ersten vier falschen Antworten: 0 Punkte
- Weitere falschen Antworten: −0.5 Punkte
- Keine Antwort: 0 Punkte
- Minimal mögliche Punktzahl: 0 Punkte

3.1. Ein Kreis hat höchstens eine endliche Anzahl Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. ☐ Wahr ☐ Falsch

3.2. Ein Polynom vom Grad 2018 hat höchstens 1009 Wendepunkte. ☐ Wahr ☐ Falsch

3.3. Wenn die ersten drei Glieder einer arithmetischen Folge ganzzahlig sind, dann sind alle Glieder ganzzahlig. ☐ Wahr ☐ Falsch

3.4. Wenn die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge ganzzahlig sind, dann sind alle Glieder ganzzahlig. ☐ Wahr ☐ Falsch

3.5. $\binom{2018!}{2} = \binom{2018!}{2016!}$ ☐ Wahr ☐ Falsch

3.6. Die komplexe Zahl $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}$ liegt auf dem Einheitskreis. ☐ Wahr ☐ Falsch

3.7. $z^{2018} = \mathbf{i}$ (z ist wie in der Aufgabe 3.6. definiert.) ☐ Wahr ☐ Falsch

3.8. $\mathbf{i}^{2018} = -1$ ☐ Wahr ☐ Falsch

3.9. $\ln(\ln(\ln(x)))$ existiert für alle $x \geq e$. ☐ Wahr ☐ Falsch

3.10. ☐ Wahr ☐ Falsch

$$\int_{-2\pi}^{-\pi} -\sin(x)dx < 0 \ .$$

3.11. Ist $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine geometrische Folge und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ eine geometrische Folge, dann ist auch $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, \cdots$ eine geometrische Folge. ☐ Wahr ☐ Falsch

3.12. Ist $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine arithmetische Folge und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ eine arithmetische Folge, dann ist auch $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, \cdots$ eine arithmetische Folge. ☐ Wahr ☐ Falsch

3.13. Die Gleichung $a - a \cdot x^2 + y^2 = 0$ beschreibt für alle reellen $a \neq 0$ eine Hyperbel. ☐ Wahr ☐ Falsch

3.14. Wenn eine komplexe Zahl z_1 einen grösseren Realteil und einen grösseren Imaginärteil hat als eine andere komplexe Zahl z_2, dann ist auch $|z_1|$ grösser als $|z_2|$. ☐ Wahr ☐ Falsch

3.15. Wenn eine Folge $a_1, a_2, a_3, \cdots$ geometrisch ist und es gilt $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ dann muss gelten $q > 1$. ☐ Wahr ☐ Falsch

3.16. Die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| - 4 = 0\}$ stellt einen Kreis in der komplexen Ebene dar. ☐ Wahr ☐ Falsch

Teil 2 mit Taschenrechner (TI-Nspire)

Name: ....., Klasse: .....

Aufgabe 4 (*8 Punkte*)

IKEA veranstaltet einen Wettbewerb für eine neue Salatschüssel. Marti Mathematiker möchte mitmachen und verwendet dazu die folgende Funtion:

$$f : y = \frac{-1}{x^4 + 1} + 1$$

Durch Rotation des Graphen von f um die y-Achse ensteht eine (unendlich breite) Salatschüssel. Die Schüssel wird nun aber so zugeschnitten, dass sie einen maximalen Durchmesser von 3 Einheiten aufweist:

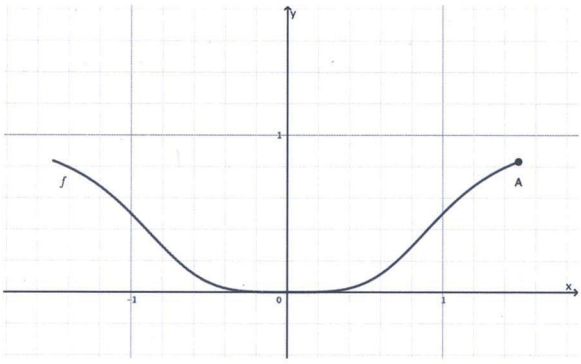


Abbildung 1: Der Graph von f

4.1. Die Schüssel wird nun bis zur Höhe $y = \frac{1}{2}$ mit Wasser gefüllt. Welchen Flächeninhalt hat die enstehende Wasseroberfläche? [2 P.]

4.2. Wie gross ist das Gesamtvolumen dieser Schüssel? [$1\frac{1}{2}$ P.]

4.3. Die Schüssel wird nun mit 2 Volumeneinheiten Wasser gefüllt. Bis zu welcher Höhe über dem Boden ist sie nun gefüllt? [$1\frac{1}{2}$ P.]

4.4. Die Schüssel wird nun nach rechts 'gekippt' so, dass sie immer in Bodenkontakt bleibt: [3 P.]

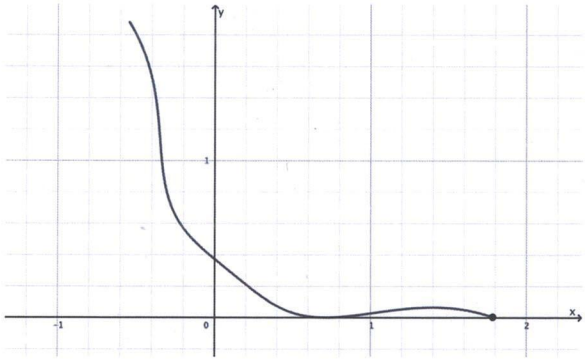


Abbildung 2: Der 'gekippte' Graph

Bei welchem Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen berührt der Punkt A (aus Abbildung 1) den 'Boden'?

Aufgabe 5 (*4 Punkte*)

Ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(2|6)$ und dem Radius $R = 10$ schneidet die positive x-Achse im Punkt P. Der Kreis begrenzt mit der Kreistangente in P und der y-Achse im 4. Quadranten eine endliche Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.

Aufgabe 6 (*11 Punkte*)

Der Graph der Funktion $y(x) = 2 \cdot \sin(x)$ wird im positiven Sinn um den Drehwinkel φ um den Ursprung gedreht, bis er wie in Abbildung 1 dargestellt in Q die x-Achse berührt. Dabei ergibt sich die gedrehte Kurve $z(t)$. Der Punkt P liegt auf der gedrehten Kurve $z(t)$ zwischen den beiden Punkten O und Q. Der Punkt P' ist die Projektion des Punktes P auf die x-Achse. Die gedrehte Kurve $z(t)$ begrenzt mit der x-Achse die Fläche A mit endlichem Inhalt.

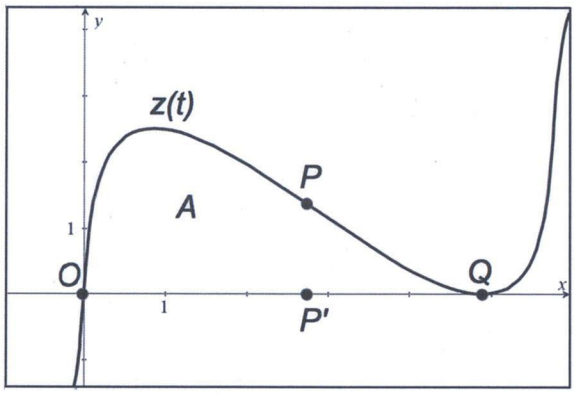


Abbildung 1

6.1. Berechnen Sie den Drehwinkel φ. [$2\frac{1}{2}$ P.]

6.2. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A. [$1\frac{1}{2}$ P.]

6.3. Geben Sie für $z(t)$ eine komplexwertige Funktionsgleichung an. [$1\frac{1}{2}$ P.]

6.4. Berechnen Sie die Koordinaten von P so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $P'QP$ maximal wird. [$2\frac{1}{2}$ P.]

Durch Drehen der Graphen von $y_1(x) = 2 \cdot \sin(x)$ und $y_2(x) = -2 \cdot \sin(x)$ um 45° um den Ursprung entstehen die Kurven $m(t)$ und $n(t)$ wie in Abbildung 2 dargestellt. Die horizontale Gerade g berührt $m(t)$. Die vertikale Gerade h berührt $n(t)$.

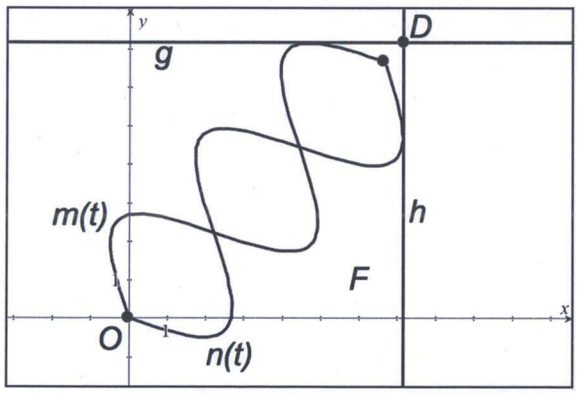
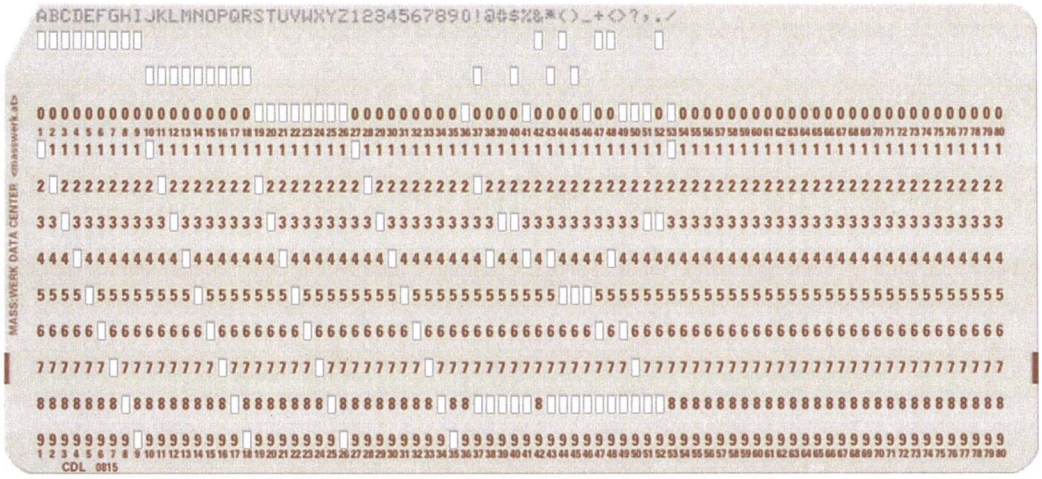


Abbildung 2

6.5. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D (Schnittpunkt von g und h). [3 P.]

Aufgabe 7 (*11 Punkte*)

In den Anfangsjahren der Computer wurden Programme mit Hilfe von Lochkarten geschrieben. Eine Standard-Lochkarte bestand aus 80 Spalten mit je 12 Zeilen.



7.1. Wie viele mögliche Lochungen gibt es für eine Standard-Lochkarte? [1 P.]

7.2. Aus technischen Gründen waren pro Spalte nur maximal zwei Löcher zugelassen. Wie viele mögliche Zeichen könnte man so pro Spalte kodieren? [$1\frac{1}{2}$ P.]

Lochkarten wurden dann von einem Computer eingelesen und interpretiert – wobei ein Programm aus mehreren Lochkarten bestand. Aus Erfahrung hat man herausgefunden, dass ca. 5% aller Programme einen Fehler aufweisen und zu einer Fehlermeldung führen. An einer Universität werden pro Tag 200 solche Programm-Aufträge eingegeben.

7.3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es mindestens 2 Fehlermeldungen? [1 P.]

7.4. Was ist die erwartete Anzahl Fehlermeldungen? [$\frac{1}{2}$ P.]

7.5. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die tatsächliche Anzahl Fehlermeldungen um mehr als fünf von der erwarteten Anzahl ab? [1 P.]

7.6. Wenn es pro Tag 10 oder mehr Fehlermeldungen gibt, dann muss der Computer für längere Zeit pausieren. Wie viele Aufträge soll die Uni pro Tag zulassen, damit die Wahrscheinlichkeit für einen solchen längeren Ausfall kleiner als 1% ist? [2 P.]

An der Universität hat es Studenten und Professoren. Die Fehlerquote der Studenten liegt erfahrungsgemäss über derjenigen der Professoren (8% bei den Studenten gegenüber 4% bei den Professoren).

7.7. Wie viele der 200 Aufträge müssen Studenten-Aufträge und wieviele müssen Professoren-Aufträge sein, damit die Gesamtfehlerquote bei 5% bleibt? [1 P.]

7.8. Unter diesen 200 Aufträgen aus 7.7. seien nun genau 10 Fehlermeldungen aufgetreten. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau fünf davon durch Studenten verursacht wurden? [3 P.]